Université de Provence 2011–2012

Adaptation

Parcours PEIP

Interrogation 3

1) a. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer (sans preuve) $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
b. Résoudre $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Dériver les fonctions suivantes :

- $f\colon x \mapsto x\cos(x^2)$;
- $g\colon x \mapsto \ln\big(\sin(x)\big)$;
- $h\colon x \mapsto \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}$.

3) Primitiver les fonctions suivantes :

- $a\colon x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} + x\sin\Big(x^2 + \pi/3\Big) - \big(\cos(x) + 2x\sin(x)\big)e^{x^2}$;
- $b\colon x \mapsto \tan(x)$;
- $c\colon x \mapsto \arctan(x)$ (bonus).

4) On considère les réels $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}$ définis pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
a. Calculer I_0 et I_1.
b. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$.
c. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
d. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq I_n \leq \frac{3}{n!}$.
e. En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.