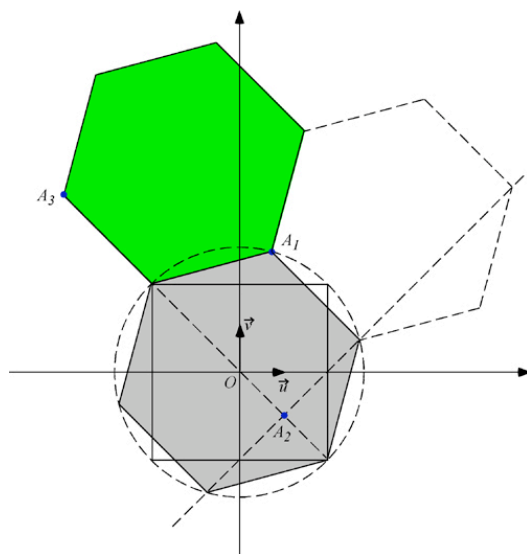


Nombres complexes : formes exponentielle et algébrique

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Sur la figure ci-dessous sont tracés un carré de côté 4 centré au point O ainsi que trois hexagones réguliers (chacun d'entre eux possédant un côté en commun avec chacun des deux autres hexagones). L'hexagone gris possède deux sommets communs avec le carré. On note z_1, z_2, z_3 les affixes respectives des points A_1, A_2, A_3 .



Déterminer (**Question 1**) la forme exponentielle des nombres z_1, z_2, z_3 . En déduire (**Question 2**) les formes exponentielle puis algébrique des nombres complexes proposés.

Convention : Dans cet exercice, on écrira tout nombre complexe z sous forme exponentielle $z = |z|e^{i\theta}$, où l'argument de z c'est à dire θ appartient à $] -\pi; \pi]$.

QUESTION 1

On a $z_2 = \dots\dots\dots$ et $z_3 = \dots\dots\dots$.

Comme $\left| \frac{z_1}{z_3} \right| = \dots\dots\dots$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_3}\right) = \dots\dots\dots$,

on a $\frac{z_1}{z_3} = \dots\dots\dots$ et $z_1 = \dots\dots\dots$.

QUESTION 2

La forme exponentielle de z_1^3 est $z_1^3 = \dots\dots\dots$

et sa forme cartésienne $z_1^3 = \dots\dots\dots$.

La forme exponentielle de $z_2 z_3$ est $z_2 z_3 = \dots\dots\dots$

et sa forme cartésienne $z_2 z_3 = \dots\dots\dots$.

La forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\frac{z_1}{z_2} = \dots\dots\dots$

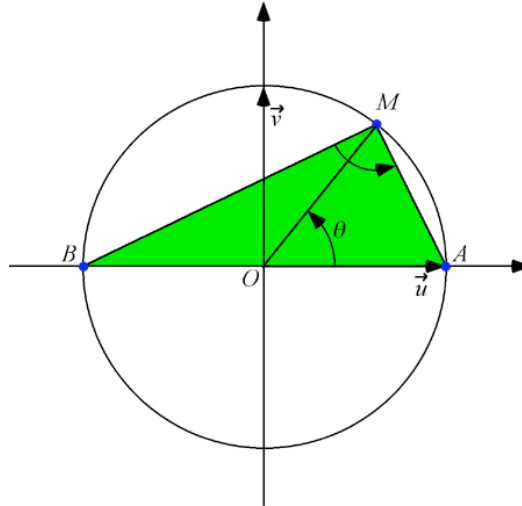
et sa forme cartésienne $\frac{z_1}{z_2} = \dots\dots\dots$.

La forme exponentielle de $\frac{1+i}{z_1}$ est $\frac{1+i}{z_1} = \dots\dots\dots$

et sa forme cartésienne $\frac{1+i}{z_1} = \dots\dots\dots$.

Une propriété du cercle.

Soient A et B les deux points du plan complexe d'affixes respectifs $z_A = 1$ et $z_B = -1$.
Pour $\theta \in [0; 2\pi[$ on note M le point d'affixe $z = \exp(i\theta)$.



Établir une propriété du triangle AMB par une interprétation géométrique du nombre complexe

$$Z := \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M}.$$

QUESTION

On a $Z = \dots\dots\dots$ (en fonction de $e^{i\theta}$, pour tout $\theta \in \dots\dots\dots$).

On en déduit l'expression de Z en fonction de $e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $e^{-i\frac{\theta}{2}}$ puis, par les formules d'Euler, en fonction de $\tan \frac{\theta}{2}$:

$$Z = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots .$$

Le module de Z est donc $|Z| = \dots\dots\dots$ et son argument est

$$\arg(Z) = \dots\dots\dots \text{ si } \theta \in]0, \pi[, \quad \arg(Z) = \dots\dots\dots \text{ si } \theta \in]\pi, 2\pi[.$$

Ceci prouve que le triangle AMB est rectangle au point $\dots\dots\dots$

puisque l'argument de Z est la mesure de l'angle orienté entre les vecteurs

$\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$.

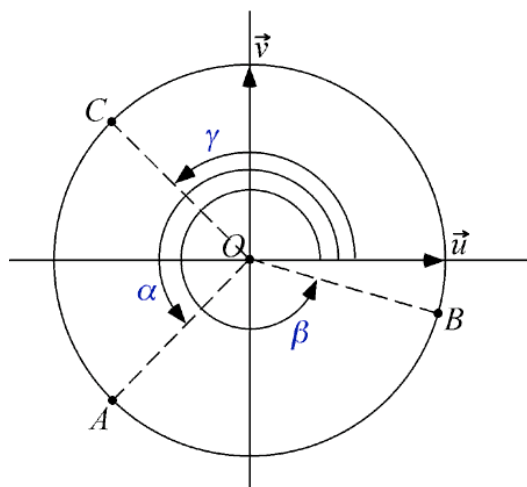
Angle au centre associé

Le plan complexe étant rapporté au repère orthonomé $(O; \vec{u}, \vec{v})$; soient A , B et C trois points du cercle trigonométrique.

On se propose de trouver une relation entre l'angle $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ et son angle au centre associé $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ par une méthode utilisant le formalisme des nombres complexes. Pour cela nous notons,

$$e^{i\alpha} = \exp(i\alpha), \quad e^{i\beta} = \exp(i\beta) \quad \text{et} \quad e^{i\gamma} = \exp(i\gamma)$$

les affixes respectives des points A , B et C :



QUESTION

$e^{i\alpha} - e^{i\gamma}$ est l'affixe du vecteur

$e^{i\beta} - e^{i\gamma}$ est l'affixe du vecteur

Donc $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ est l'argument du nombre complexe $Z = \dots$

Le calcul donne $Z = e^{i(\beta-\alpha)/2} \frac{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'argument de $\lambda e^{i(\beta-\alpha)/2}$ est:

.....

L'argument de Z est $(\beta - \alpha)/2$ parce que:

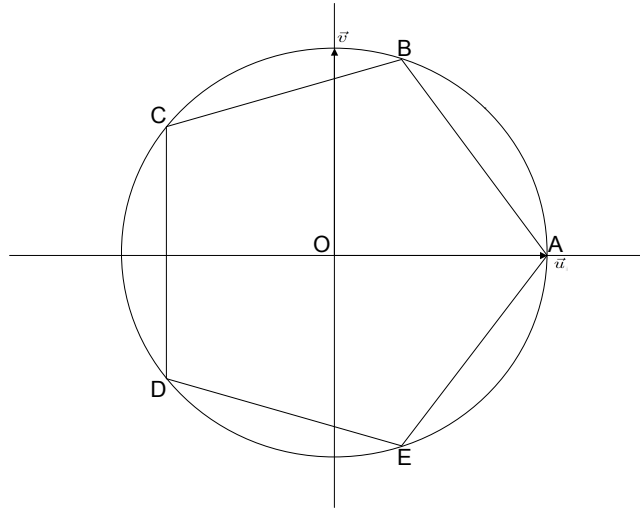
.....

En déduire quelle est la relation entre $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$:

.....

Calcul de trigonométrie

Dans le plan complexe, on considère le pentagone régulier, $ABCDE$ inscrit dans le cercle trigonométrique (voir figure) et dont le sommet A est le point d'affixe $z_A = 1$.



Soient z_A, z_B, z_C, z_D, z_E les affixes respectives des points A, B, C, D, E . On considère les deux quantités suivantes :

$$\alpha = z_B + z_E \quad \text{et} \quad \beta = z_C + z_D,$$

ainsi que le nombre complexe

$$\xi = e^{2i\pi/5} = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5) \tag{1}$$

On se propose de calculer la valeur algébrique de $\cos(2\pi/5)$.

QUESTION 1

On calcule d'abord $z_A = \xi^5 = \dots\dots\dots$

puis, en fonction de ξ ,

$$z_B = \dots\dots\dots, \quad z_C = \dots\dots\dots, \quad z_D = \dots\dots\dots,$$

$$z_E = \dots\dots\dots, \quad \alpha = \dots\dots\dots, \quad \beta = \dots\dots\dots.$$

ξ^4 est le conjugué de ξ parce que $\dots\dots\dots$.

En utilisant (1) on en déduit

$$\alpha = \dots\dots\dots \tag{2}$$

————— QUESTION 2 —————

Soit $Q(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$. D'après la formule des sommes géométriques,

$Q(z) = \dots\dots\dots$ si $z \neq \dots\dots\dots$.

Comme $\xi^5 = \dots\dots\dots$ et $\xi \neq \dots\dots\dots$ on en déduit

$$Q(\xi) = \dots\dots\dots \quad (3)$$

————— QUESTION 3 —————

On développe

$$(z - \alpha)(z - \beta) = \dots\dots\dots \quad (4)$$

Compte tenu des valeurs de α et β trouvées à la question 1, on a

$\alpha + \beta = \dots\dots\dots$ et $\alpha\beta = \dots\dots\dots$ (sous forme de somme de puissances de ξ).

Mais compte tenu de (3) on en déduit les valeurs exactes de $\alpha + \beta =$ et $\alpha\beta =$:

$$\alpha + \beta = \dots\dots\dots \text{ et } \alpha\beta = \xi^3 \left(\dots\dots\dots \right) = \dots\dots\dots$$

D'après (4), $(z - \alpha)(z - \beta)$ est un polynôme à coefficients entiers:

$$(z - \alpha)(z - \beta) = \dots\dots\dots$$

dont on calcule les racines: $z_1 = \dots\dots\dots > 0$ et $z_2 = \dots\dots\dots < 0$.

On conclut que $\alpha = z_1$ et $\beta = z_2$, compte tenu que d'après la relation ($\dots\dots\dots$) α est positif. D'après cette même relation,

$$\cos(2\pi/5) = \dots\dots\dots$$