Calculs de trigonométrie I

Étant donné un nombre réel θ, on note

$$A = \sin\theta + \cos\theta.$$

On se propose d'exprimer les quantités

$$B = \sin\theta\cos\theta \quad \text{et} \quad C = \sin^4\theta + \cos^4\theta$$

en fonction de A.

QUESTION

Calculer A^2 en fonction de B:

$A^2 =$ ..... ,

et en déduire B en fonction de A:

$B =$ ..... .

$C + 2B^2$ est le carré de ..... .

On en déduit C en fonction de B:

$C =$ ..... ,

puis C en fonction de A:

$C =$ ..... .

Calculs de trigonométrie II

Étant donné un nombre réel θ, on note $A = \sin\theta + \cos\theta$ et on pose successivement

$B = \sin\theta\cos\theta$; $\quad C = (\sin\theta - \cos\theta)^2$; $\quad D = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^3\theta - \cos^3\theta)$; $\quad E = \sin^5\theta + \cos^5\theta$.

On se propose d'exprimer les quantités B, C, D, E en fonction de A.

——————— QUESTION 1 ———————

D'après l'exercice précédent, $B =$ ..... .

Calculer C en fonction de B:

$C =$ ..... ,

et en déduire C en fonction de A:

$C =$ ..... .

——————— QUESTION 2 ———————

Factoriser $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ et $\sin^3\theta - \cos^3\theta$ par $\sin\theta - \cos\theta$:

$\sin^2\theta - \cos^2\theta =$ ..... et $\sin^3\theta - \cos^3\theta =$ ..... .

En déduire D en fonction de A, B, C:

$D =$ ..... ,

puis D en fonction de A:

$D =$ ..... .

——————— QUESTION 3 ———————

Développer D de façon à l'exprimer en fonction de E, A, B:

$D =$ ..... .

En déduire

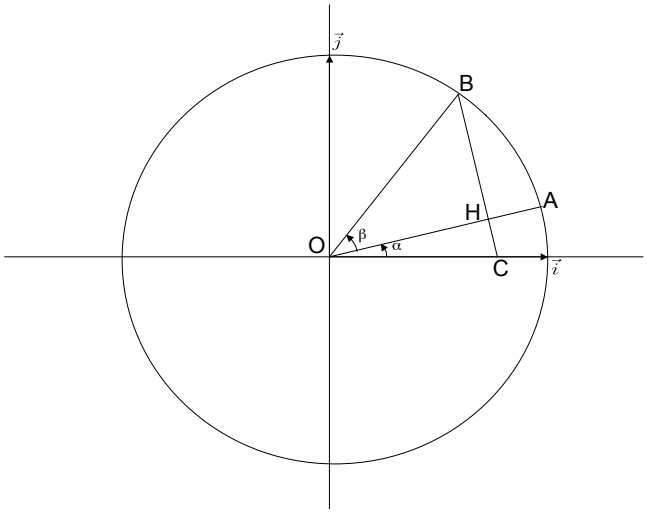
$E =$ ..... (en fonction de A, D), puis $E =$ ..... (en fonction de A).

Sinus de la somme de deux angles

Soient α et β deux nombres réels strictement positifs tels que $0 < \alpha + \beta < \pi/2$. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note A et B les points du cercle trigonométrique tels que

$$(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OA}) = \alpha \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \beta \pmod{2\pi}$$

Soit H la projection orthogonale de B sur la droite (OA) et C le point d'intersection de (BH) avec l'axe des abscisses (voir figure ci-dessous).



NB : Dans cet exercice, on notera $\mathcal{A}(MNP)$ l'aire du triangle déterminé par les trois points M, N, et P.

Question – Compléter le raisonnement permettant d'exprimer $\sin(\alpha+\beta)$ en fonction des sinus et cosinus de α et β.

QUESTION 1

Comme $OC =$ ..... (en fonction de OH et α)

et comme $OH =$ ..... (en fonction de β),

on tire : $OC =$ ..... (en fonction de α et β) et donc :

$\mathcal{A}(OCB) =$ ..... (1)

QUESTION 2

D'une part, $\mathcal{A}(OHB) =$ ..... . (2)

D'autre part, comme $OH =$ ....., on a :

$\tan\alpha =$ ..... (en fonction de HC et β), d'où $HC =$ ..... ,

et $\mathcal{A}(OHC) =$ ..... . (3)

——————— QUESTION 3 ———————

Du fait que $\mathcal{A}(OHB) + \mathcal{A}(OHC)$ est l'aire du triangle ..... ,

on déduit de (1), (2) et (3) que

$\sin(\alpha + \beta) =$ ..... .

Calcul de trigonométrie III

Étant donné θ un nombre réel, on se propose de linéariser $\cos^3\theta$ (c'est à dire, exprimer $\cos^3\theta$ en fonction de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$, pour $n = 1, 2, \ldots$) de deux manières différentes.

Question 1 – En développant $\cos 3\theta$ (à l'aide de la formule du cosinus de la somme).

Question 2 – En utilisant les nombres complexes (formules d'Euler).

——— QUESTION 1 ———

On a : $\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) =$ ..... ,

d'où : $\cos 3\theta =$ ..... (en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$)

soit : $\cos 3\theta =$ ..... (en fonction de $\cos\theta$ uniquement),

d'où on tire $\cos^3\theta =$ ..... .

——— QUESTION 2 ———

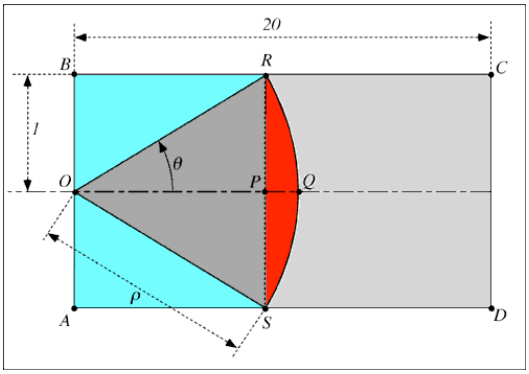
Par les formules d'Euler, $\cos^3\theta = \frac{1}{8}\Big($ ..... $\Big)^3$

et, en développant, $\cos^3\theta =$ ..... .

En utilisant à nouveau les formules d'Euler, $\cos^3\theta =$ ..... .

Relations métriques dans le triangle

L'unité de longueur du plan étant fixée, on considère un rectangle $ABCD$ de largeur $AB = 2$ et de longueur $BC = 20$. Soit O le milieu du segment AB. Si ρ est un nombre réel compris entre 1 et $\sqrt{20^2 + 1^2}$, le cercle de centre O et de rayon ρ coupe le segment BC en un point R et le segment AD en un point S.



On note $\overset{\frown}{ORQS}$ le secteur du disque de centre O et de rayon ρ, délimité par les segments OR et OS. On note aussi $\overset{\frown}{PRQS}$ la portion de ce disque délimitée par le segment RS et l'arc de cercle $\overset{\frown}{RQS}$. Dans cet exercice, on s'intéresse la portion du rectangle $ABCD$ qui est à gauche de l'arc $\overset{\frown}{RQS}$, soit

$$\Sigma = ABRS + \overset{\frown}{PRQS} .$$

On notera aussi $\theta = (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$, de sorte que dans le triangle rectangle OPR on a la relation

$$\sin\theta = \frac{1}{\rho}.$$

Notation – Étant donnée χ une portion du plan, on note $\mathcal{A}(\chi)$ l'aire de χ; ainsi, par exemple, $\mathcal{A}(ABCD) = 40$ unités d'aire.

Question 1 – Trouver une expression de $\mathcal{A}(\Sigma)$ en fonction de θ seul.

Question 2 – On se propose de trouver une valeur de ρ pour laquelle Σ couvre à peu près la moitié du rectangle $ABCD$.

——————————— QUESTION 1 ———————————

Comme $OP =$ ..... (en fonction de ρ et θ), il vient

$$\mathcal{A}(ABRS) = \text{.....} \ . \tag{1}$$

D'autre part, $\mathcal{A}(\overset{\frown}{ORQS}) =$ ..... et $\mathcal{A}(ORS) =$ ..... donc

$$\mathcal{A}(\overset{\frown}{PRQS}) = \text{.....} \tag{2}$$

On déduit de (1) et (2) que $\mathcal{A}(\Sigma) =$ ..... (en fonction de ρ et θ)

et, comme $\rho =$ ..... (en fonction de θ), $\mathcal{A}(\Sigma) =$ ..... .

——————————— QUESTION 2 ———————————

Pour $\theta = 0,1$ radians on a $\mathcal{A}(\Sigma) \simeq$ ..... et $\rho \simeq$ ..... .