Université de Provence	2011–2012

Mathématiques Générales I

Parcours PEIP

Cours : Nombres complexes

1 Définitions

1.1 Nombres complexes

Définition 1. On appelle nombre complexe tout élément z de la forme $z = a + ib$, avec a et b deux nombres réels et i un élément particulier vérifiant $i^2 = -1$.

Remarque 2. On admet la construction théorique de cet élément i.

Définition 3. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, a est appelé partie réelle de z, notée $\Re\mathrm{e}(z)$, et b sa partie imaginaire, notée $\Im\mathrm{m}(z)$. On appelle $a + ib$ l'écriture cartésienne de z.
Si $b = 0$, on dit que z est réel.
Si $a = 0$, on dit que z est imaginaire pure.

Notation 4. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et on le munit de :
– l'addition induite par l'addition dans $\mathbb{R}$ de chaque composante

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)\ ;$$

– la multiplication induite par la multiplication dans $\mathbb{R}$ et par la distributivité

$$\begin{aligned}(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &:= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2).\end{aligned}$$

Proposition 5. *Les opération d'addition et de multiplication dans $\mathbb{C}$ sont :*

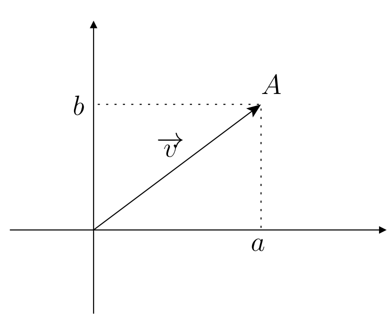
associatives : $\begin{cases}(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)\end{cases}$;

commutatives : $\begin{cases}z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1z_2 = z_2z_1\end{cases}$;

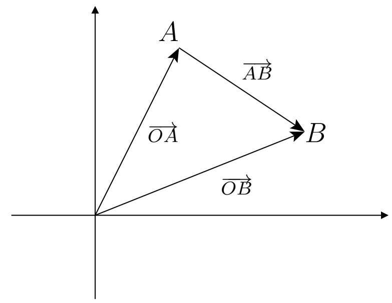
distributives : $\begin{cases}z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \\ (z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_1z_3\end{cases}$.

Interprétation géométrique :
Un nombre complexe étant un couple de nombre réels, on peut l'interpréter comme un point A du plan $\mathbb{R}^2$, ou encore comme le vecteur $\vec{v}$ determiné par l'origine du plan et le point A.

$z = a + ib \ \mapsto$



L'addition correspond alors à la somme des vecteurs. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ entre deux points A et B étant la différence des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$, O désignant l'origine, il est donc décrit par $z_B - z_A$ où z_A et z_B sont respectivement les nombres complexes décrivant les points A et B.



La multiplication par un nombre complexe correspond à une transformation du plan.

Remarque 6. Puisque l'axe des abscisses correspond aux nombre réels, on l'appelle souvent axe réel.

1.2 Conjugué

Définition 7. Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle conjugué de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $a - ib$.

Proposition 8. *Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :*
- $\overline{\overline{z_1}} = z_1$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$;
- $\overline{\frac{1}{z_1}} = \frac{1}{\overline{z_1}}$ *si* $z_1 \neq 0$;
- $\begin{cases} z_1 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z_1 \text{ réel} \\ z_1 = -\overline{z_1} \Leftrightarrow z_1 \text{ imaginaire pure} \end{cases}$;
- $\begin{cases} z_1 + \overline{z_1} = 2\Re\mathrm{e}(z_1) \\ z_1 - \overline{z_1} = 2\Im\mathrm{m}(z_1) \end{cases}$;
- $z_1\overline{z_1} \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration du dernier point. Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a :

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 + i(ab - ba) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+.$$

□

Interprétation géométrique :
Le point associé à $\overline{z}$ est le symétrique de celui associé à z par rapport à l'axe réel.

1.3 Module

Définition 9. Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on appelle module de z, noté $|z|$, le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$. Cette notion prolonge celle de valeur absolue pour les nombre réels.

Proposition 10. *Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :*
- $|\Re\mathrm{e}(z_1)| \leq |z_1|$, $|\Im\mathrm{m}(z_1)| \leq |z_1|$;
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;
- $|\overline{z_1}| = |z_1|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *avec égalité si et seulement si* $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$ *(inégalité triangulaire).*

Démonstration de l'inégalité triangulaire. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, les réels $|z_1 + z_2|$ et $|z_1| + |z_2|$ sont positifs, donc $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ est équivalent à $|z_1 + z_2|^2 \le \big(|z_1| + |z_2|\big)^2$. Or

$$\begin{array}{rc} & |z_1+z_2|^2 \le \big(|z_1|+|z_2|\big)^2 \\ \Leftrightarrow & (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ \Leftrightarrow & z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \le z_1\overline{z_1} + 2|z_1||z_2| + z_2\overline{z_2} \\ \Leftrightarrow & z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} \le 2|z_1||\overline{z_2}| \\ \Leftrightarrow & 2\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2}) \le 2|z_1\overline{z_2}|, \end{array}$$

et la dernière inégalité est vraie en vertu de la proposition 10. De plus, on a égalité si et seulement $\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$, c'est à dire si et seulement si $z_1\overline{z_2}$ est un réel positif.

Pour l'inégalité de gauche, on applique celle de droite à $w_1 = z_1 + z_2$ et $w_2 = -z_2$. On obtient

$$\begin{array}{rc} & |z_1+z_2-z_2| \le |z_1+z_2| + |-z_2| \\ \Leftrightarrow & |z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2|. \end{array}$$

En l'appliquant également à $w_1 = z_1 + z_2$ et $w_2 = -z_1$, on obtient

$$-\big(|z_1| - |z_2|\big) = |z_2| - |z_1| \le |z_1 + z_2|,$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue. □

Proposition 11. *Tout nombre complexe non nul admet un inverse pour la multiplication.*

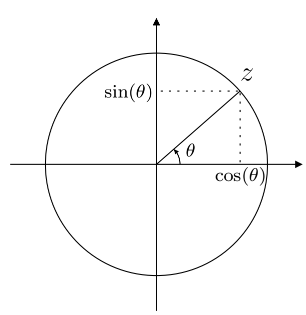
Démonstration. Si z est un nombre complexe non nul, alors $|z| > 0$ et $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ est un inverse pour z puisque $z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$. □

Notation 12. On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes inversibles, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Interprétation géométrique :
Le module de z correspond à la distance entre l'origine et le point associé à z ou encore à la longueur du vecteur associé. Le module de $z_2 - z_1$ est donc la distance entre les points associés à z_1 et à z_2.
L'inégalité triangulaire appliquée à $w_1 = z_1 - z_3$ et $w_2 = z_2 - z_3$ dit que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points.

1.4 Nombres complexes de module 1

Interprétation géométrique :
Les nombres complexes de module 1 sont les nombres complexes situés à une distance 1 de l'origine. Il s'agit donc des points du cercle unité. Ceux-ci sont déterminés par leur angle par rapport au demi-axe des réels positifs.



Plus algébriquement :

Proposition 13. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ vérifiant $z = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$.*

Démonstration. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $|z|^2 = a^2 + b^2 = 1$, alors a est dans $[-1, 1]$ et il existe un unique $\widetilde{\theta} \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos(\widetilde{\theta})$. Mais alors $\sin(\widetilde{\theta}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widetilde{\theta})} = \sqrt{1 - a^2} = |b|$. Si $b \geq 0$, on prend $\theta = \widetilde{\theta}$, sinon on prend $\theta = 2\pi - \widetilde{\theta} \in]\pi, 2\pi[$.

L'unicité provient de ce que, pour $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$, on ait

$$\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \Leftrightarrow \theta_2 = \theta_1 \text{ ou } \theta_2 = 2\pi - \theta_1$$

et

$$\sin\theta_1 = -\sin(2\pi - \theta_1).$$

□

Notation 14. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Proposition 15. *Pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a :*
- $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$;
- $\frac{1}{e^{i\theta_1}} = \overline{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1}$.

Démonstration. Cela provient des formules trigonométriques. □

1.5 Argument

Remarque 16. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1.

Définition 17. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument de z tout réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Proposition 18. *Si θ est un argument de z, alors l'ensemble des arguments de z est exactement $\{\theta+2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.*

Définition 19. On appelle l'argument de z, noté $\mathrm{Arg}(z)$, l'unique argument de z compris dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Proposition 20. *Tout nombre complexe non nul admet une écriture sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Elle est unique et on l'appelle écriture polaire de z.*

Démonstration. L'existence provient de l'égalité $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$.

Pour prouver l'unicité, on suppose $r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$. On a alors

$$\left|\frac{r_1}{r_2}\right| = \left|\frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}}\right| = |e^{i(\theta_2-\theta_1)}| = 1$$

et donc $r_1 = r_2$. Mais alors on a également $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = 1$, c'est à dire $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, et donc $\theta_1 = \theta_2$. □

Proposition 21. *Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$ est un argument de $z_1 + z_2$.*

Remarque 22. L'écriture cartésienne est bien adaptée à l'addition tandis que l'écriture polaire est mieux adaptée à la multiplication.

Interprétation géométrique :
L'argument d'un nombre complexe, c'est l'angle que forme le vecteur associé avec le demi-axe des réels positifs. La décomposition polaire, c'est la donnée d'un point par son angle au demi-axe des réels positifs et sa distance à l'origine.

2 Puissances et racines de nombres complexes

2.1 Racines carrées

Proposition 23. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$, il existe deux racines carrées (calculables) de z, opposées l'une de l'autre ; c'est à dire, il existe $w \in \mathbb{C}^*$ tel que $w^2 = (-w)^2 = z$.*

Dans ce qui suit, la méthode permettant de trouver les racines est beaucoup plus importantes que les formules. C'est elle qui permettra, en pratique, de calculer effectivement les racines d'un nombre complexe donné.

Démonstration. Dans le cadre de la recherche d'une racine carrée, l'écriture cartésienne peut être bien adaptée. On écrit donc $z = a + ib$ et on cherche $w = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $w^2 = z$. Cela équivaut à $(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib$, ou encore à $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$.

Or, on a également $x^2 + y^2 = |w|^2 = |w^2| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. En additionnant et en soustrayant avec la première des deux relations ci-dessus, on obtient

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$

et donc

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Enfin, la relation $2xy = b$, b étant donné, nous informe sur le signe du produit xy, c'est à dire nous dit si x et y ont le même signe ou non.

Si b est positif, les deux racines éventuels de z sont donc

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

et si b est négatif, les deux racines éventuelles sont

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Réciproquement, un calcul direct montre que les deux sont bien racines de z. □

Remarque 24. **Il ne faut jamais écrire $\sqrt{z}$ quand z n'est pas un réel positif**. En effet, quand x est un réel strictement positif, l'équation $y^2 = x$ admet toujours deux racines, l'une positive, l'autre négative. On a donc un moyen simple de les différencier : leur signe, et par convention on choisit de noter $\sqrt{x}$ celle qui est positive car on a alors la relation $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$.
Quand z est un complexe quelconque, l'équation $w^2 = z$ admet toujours deux solutions opposées, mais il n'est plus aussi simple de choisir laquelle des deux sera représentée par une notation $\sqrt{z}$. Pire que cela, on peut démontrer qu'il est impossible de définir une fonction "$\sqrt{\ }$" sur $\mathbb{C}$ qui soit continue tout en vérifiant toujours $\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$. Dans ces conditions, le plus simple est de se passer d'une telle notation.

Proposition 25. *Pour tous nombres complexes a, b et c avec a non nul, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions, éventuellement confondues, qui sont $\frac{-b\pm\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée, éventuellement nulle, du nombre complexe $b^2 - 4ac$.*

Démonstration. Puisque $a \neq 0$, on a

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0.$$

Mais en développant tout ce qui peut être développé, on observe que

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} &= \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &= \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \\ &= \left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right). \end{aligned}$$

Or si un produit s'annule, c'est que l'un des deux termes s'annule, on en déduit donc que les deux seules solutions possibles sont bien $\frac{-b\pm\delta}{2a}$.

Réciproquement, un calcul direct montre qu'elles sont bien solutions. □

2.2 Racines $n^{\text{ièmes}}$

Proposition 26. *Soit $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions distinctes, à savoir $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.*

Démonstration. Puisque a est non nul, 0 n'est pas solution. On peut donc écrire toute solution éventuelle z sous sa forme polaire $\rho e^{i\phi}$. L'équation devient alors $\rho^n e^{in\phi} = re^{i\theta}$, ce qui revient à $rho^n = r$ et $e^{in\phi} = e^{i\theta}$, ou encore $rho = \sqrt[n]{r}$ et $n\phi = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de a est donc

$$\left\{ \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} | k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Or la suite $(e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}})_{k\in\mathbb{Z}}$ est périodique de période n car, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$e^{i\frac{\theta+2(k+n)\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}+2\pi} = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}.$$

On en déduit le résultat. □

Exemple 27. Les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les nombres complexes 1, $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $e^{i\frac{4\pi}{n}}$, $\cdots$, $e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$.

Remarque 28. Si n est un entier plus grand que deux, l'équation $z_1^n = z_2^n$ n'implique **pas** que $z_1 = z_2$, mais que ou bien z_1 et z_2 sont tous deux nuls, ou bien leur quotient est l'une des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

2.3 Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition 29. *Soit a un nombre complexe différent de 1, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}(a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k &= \sum_{k=0}^{n}(a-1)a^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} - a^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a^{k+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) \\ &= \left(a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^k\right) - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a^k\right) \\ &= a^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

□

Remarque 30. Cette proposition se démontre également très bien par récurrence sur n.

Corollaire 31. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

si $\boldsymbol{\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha) = n+1$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\alpha) = 0$ *;*

si $\boldsymbol{\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha) = \frac{\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Démonstration. Si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$, le résultat est clair. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha)\ ,\ B_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\alpha)\ \text{ et }\ C_n = A_n + iB_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned}C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha) + i\sin(k\alpha) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha} &= \sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\alpha}\right)^k \\ &= \frac{e^{i(n+1)\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}}\,\frac{e^{i\frac{(n+1)\alpha}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n\alpha}{2}}\,\frac{2i\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{n\alpha}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Il ne reste plus, pour conclure, qu'à observer que $A_n = \Re\mathrm{e}(C_n)$ et $B_n = \Im\mathrm{m}(C_n)$. □

3 Transformations du plan

Chaque point du plan correspond à un nombre complexe. Toute transformation du planpeut donc être vue comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Le but de cette partie est de traduire sous forme complexe toutes les transformation usuelles du plan.

3.1 Transformations fixant l'origine

Proposition 32. *L'homothétie h_k centrée en l'origine et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ correspond à l'application $(z \mapsto kz)$.*
La rotation r_θ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour de l'origine correspond à $(z \mapsto e^{i\theta} z)$.
La symétrie s_0 par rapport à l'axe réel correspond à $(z \mapsto \overline{z})$.

Démonstration. Par définition, l'application h_k envoie le vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur le vecteur $k\overrightarrow{OA}$. Au nombre complexe z, elle associe donc le nombre complexe kz.

L'application r_θ envoie, quant à elle, le point A sur le seul point B tel que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ soient de même longueur et forment un angle θ. Cela signifie que $|z_A| = |z_B|$ et que $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \mathrm{Arg}(z_B) - Arg(z_A) = \theta$. On a donc $\frac{z_B}{z_A} = e^{i\theta}$ et donc $z_B = e^{i\theta} z_A$.

L'assertion sur la symétrie axiale a déjà été vue. □

Corollaire 33. *La symétrie centrale s_O autour de l'origine s'écrit $z \mapsto -z$.*
La symétrie axiale s_θ par rapport à la droite passant par l'origine et formant un angle $\theta \in \mathbb{R}$ avec l'axe réel s'écrit $(z \mapsto e^{2i\theta}\overline{z})$.

Démonstration. Que ce soit en interprétant s_O comme une rotation d'angle π ou une homothétie de rapport -1, on obtient le résultat.

Avec les notations ci-dessus, la symétrie s_θ peut se décomposer [1] en $s_\theta = r_\theta \circ s_0 \circ r_{-\theta}$. D'après ce qui précède, cela donne

$$z \quad \mapsto \quad e^{-i\theta} z \quad \mapsto \quad \overline{e^{-i\theta} z} = e^{i\theta}\overline{z} \quad \mapsto \quad e^{i\theta} e^{i\theta}\overline{z} = e^{2i\theta}\overline{z}.$$

□

Corollaire 34. *Toute application de la forme $(z \mapsto az)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ correspond à la composition d'une homothétie et d'une rotation, toutes deux centrée en l'origine.*

Démonstration. On écrit $a = re^(i\theta)$ sous forme polaire. La multiplication par a peut alors être décomposée en d'abord une multiplication par r, *i.e.* une homothétie de rapport r, puis une multiplication par $e^{i\theta}$, *i.e.* une rotation d'angle θ. □

3.2 Transformation ne fixant pas nécessairement l'origine

Proposition 35. *Si w représente le vecteur $\overrightarrow{v}$, alors la translation $t_{\overrightarrow{v}}$ de vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit $(z \mapsto z + w)$.*

Démonstration. Si la translation $t_{\overrightarrow{v}}$ envoie A sur B ; c'est que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ et donc que $z_B - z_A = w$. □

Corollaire 36. *Soit A le point d'affixe z_A.*
L'homothétie $h_{A,k}$ de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ s'écrit $(z \mapsto kz + (1-k)z_A)$.
La rotation $r_{A,\theta}$ de centre A et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ s'écrit $(z \mapsto e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})z_A)$.

Démonstration. Dans les deux cas, on peut procéder de deux manières.

1ère méthode : dans l'esprit de la preuve du corollaire 33, on peut écrire la transformation comme la composée de
  i. la translation $t_{\overrightarrow{AO}}$ qui ramène A en l'origine ;

1. cela correspond à tourner le plan de sorte à rendre horizontale la droite par rapport à laquelle on veut faire la symétrie, faire la symétrie et enfin remettre le plan à sa place en faisant la rotation inverse

ii. une tranformation qui cette fois fixe l'origine ;
iii. la translation $t_{\overrightarrow{OA}}$qui renvoie l'origine en A.
Dans le cas de l'homothétie, cela donne par exemple :

$$z \quad \mapsto \quad z - z_A \quad \mapsto \quad k(z - z_A) \quad \mapsto \quad k(z - z_A) + z_A = kz + (1 - k)z_A.$$

2**nde** **méthode :** on peut reprendre la démonstration de la proposition 32 en remplaçant l'origine par A.
Dans le cas de la rotation, cela donne par exemple :
L'application $r_{A,\theta}$ envoie le point M sur le seul point M' tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ soient de même longueur et forment un angle θ. Cela signifie que $|z_M - z_A| = |z_{M'} - z_B|$ et que $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}\right) = \theta$. On a donc $\frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A} = e^{i\theta}$ et donc $z_{M'} = e^{i\theta}(z_M - z_A) + z_A$.

$\square$

Corollaire 37. *Toute application de la forme* $(z \mapsto az + b)$ *avec* $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $b \in \mathbb{C}$ *correspond à la composition d'une homothétie, d'une rotation et d'une translation.*