

Mathématiques Générales I

PARCOURS PEIP

COURS : SUITES RÉELLES

1 Définitions

Définition 1. Une suite $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout entier $n \in \mathbb{N}$ associe le réel u_n .

Définition 2. On dit qu'une suite u est majorée (resp. minorée, bornée) si l'ensemble $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (resp. minoré, borné), c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq M$ (resp. $M \leq u_n$, $-|M| \leq u_n \leq |M|$).

Définition 3. On dit qu'une suite u est croissante (resp. strictement croissante) si l'application $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante (resp. strictement croissante), c'est-à-dire si, pour $n, p \in \mathbb{N}$, $(n \leq p) \Rightarrow (u_n \leq u_p)$ (resp. $(n < p) \Rightarrow (u_n < u_p)$).

On dit qu'elle est décroissante (resp. strictement décroissante) si la suite $-u := (-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante).

On dit qu'une est monotone (resp. strictement monotone) si elle croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Proposition 4. Une suite est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) si et ssi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$, $u_{n+1} \leq u_n$, $u_{n+1} < u_n$).

Démonstration. Une des implications est évidente. Montrons l'autre implication dans le cas croissant, les trois autres cas étant similaires. On procède par récurrence sur $d = |p - n| \in \mathbb{N}^*$.

- i. Pour $d = 1$, on a $(n \leq p) \Rightarrow p = n + 1$ et la propriété est vraie par hypothèse.
- ii. Supposons le résultat vrai au rang d et prenons $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $|p - n| = d + 1$. On a alors $(n \leq p) \Rightarrow p = n + d + 1$. Par hypothèse on a $u_p = u_{n+d+1} \geq u_{n+d}$, et par hypothèse de récurrence $u_{n+d} \geq u_n$. On en déduit bien $u_n \leq u_p$.

Comme, de plus, il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_n$, on a bien $(n \leq p) \Rightarrow (u_n \leq u_p)$ pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}$. La suite u est bien croissante. $\square$

2 Suites convergentes

2.1 Convergence

Définition 5. On dit qu'une suite u converge vers un entier $\ell \in \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Remarques 1.

1. Cette définition peut se traduire par : à partir d'un certain rang, tous les éléments de la suite sont aussi proche de ℓ que l'on veut ; la notion "d'aussi proche que l'on veut" se traduisant par "être à une distance de ℓ inférieure à ε , quelque soit le ε choisi".
2. Bien entendu, à $\varepsilon > 0$ fixé, le rang N à partir duquel tous les éléments de la suite seront à distance ε de ℓ va dépendre de N .

Définition 6. On dit qu'une suite u est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que u converge vers ℓ .

Proposition 7. Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'une u converge simultanément vers deux réels distincts $\ell_1 < \ell_2$. On note $m := \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$ la moyenne des deux limites. En prenant $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} > 0$, on sait qu'il existe d'une part $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on ait $u_n < \ell_1 + \varepsilon = m$ et d'autre part $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on ait $u_n > \ell_2 - \varepsilon = m$. Mais alors, pour n simultanément supérieur à N_1 et N_2 , on a $u_n < m$ et $u_n > m$, ce qui est absurde. $\square$

Proposition 8. Si une suite u convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq A$ avec $A \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq A$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\ell > A$. Alors, par convergence de u vers ℓ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \ell - A$. Mais alors $u_n > \ell - (\ell - A) = A$ ce qui contredit la majoration des termes de u par A . $\square$

Proposition 9. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit u une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < 1$. On choisit alors A et B des bornes pour l'ensemble fini $\{u_n | n \in \llbracket 0, N \rrbracket\} \cup \{\ell - 1, \ell + 1\}$. Comme ce sont encore des bornes pour l'intervalle $[\ell - 1, \ell + 1]$ contenant tous les éléments u_n pour $n \geq N$, ce sont donc des bornes pour tous les éléments de la suite u . $\square$

Proposition 10. Soit u et v deux suites convergeant respectivement vers les réels ℓ_u et ℓ_v et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les suites $u + \lambda v := (u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u.v := (u_n.v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels $\ell_u + \lambda \ell_v$ et $\ell_u.\ell_v$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on a alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ et $\frac{\varepsilon}{2(1+|\lambda|)} > 0$. Par hypothèse sur les convergences de u et v , il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell_u| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|v_n - \ell_v| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\lambda|)}$. Mais alors, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |u_n + \lambda v_n - \ell_u - \lambda \ell_v| &\leq |u_n - \ell_u| + |\lambda v_n - \lambda \ell_v| \\ &\leq |u_n - \ell_u| + |\lambda| |v_n - \ell_v| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon |\lambda|}{2(1+|\lambda|)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite $u + \lambda v$ converge donc bien vers $\ell_u + \lambda \ell_v$.

Concernant la suite-produit. D'après la Prop. 9, les suites u et v sont bornées, il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n|, |v_n| \leq M$. On a alors notamment $|\ell_v| \leq M$ d'après la Prop. 8. Par hypothèse sur les convergences de u et v , il existe $N'_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'_1$, $|u_n - \ell_u| < \frac{\varepsilon}{2M}$ et $N'_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'_2$, $|v_n - \ell_v| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Mais alors, pour tout $n \geq \max(N'_1, N'_2)$, on a

$$\begin{aligned} |u_n.v_n - \ell_u.\ell_v| &= |u_n.v_n - u_n.\ell_v + u_n.\ell_v - \ell_u.\ell_v| \\ &\leq |u_n.(v_n - \ell_v)| + |(u_n - \ell_u)\ell_v| \\ &\leq \frac{\varepsilon |u_n|}{2M} + \frac{\varepsilon |\ell_v|}{2M} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite $u.v$ converge donc bien vers $\ell_u.\ell_v$. $\square$

Proposition 11. *Soit u une suite convergeant vers $\ell \neq 0$. Alors ses termes sont non nuls à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$ et la suite $\left(\frac{1}{u_{n+N_0}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.*

Démonstration. On a $\frac{|\ell|}{2} > 0$ donc il existe un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_0$, $|u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$. Mais alors $|u_n| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$. De fait, $\frac{1}{u_n}$ est bien défini.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geq N_0$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon \ell^2}{2}$ et on a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| &= \left| \frac{\ell - u_n}{u_n \cdot \ell} \right| \\ &\leq \frac{2|u_n - \ell|}{\ell^2} \\ &\leq \frac{2}{\ell^2} \cdot \frac{\varepsilon \ell^2}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite $\left(\frac{1}{u_{n+N_0}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc bien vers $\frac{1}{\ell}$. □

2.2 Critères de convergence

Proposition 12. *Une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) converge.*

Démonstration. Montrons le résultat pour une suite u croissante majorée, le résultat pour les suites décroissantes minorée s'en déduira alors en considérant $-u$.

La suite est bornée donc l'ensemble $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ admet une borne supérieure que l'on note ℓ . Montrons u converge vers ℓ . Pour cela, on considère $\varepsilon > 0$. Par minimalité de la borne supérieure, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \ell - \varepsilon$ mais comme la suite est croissante, on a alors, pour tout entier $n \geq N$, $\ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell$. Mais alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$. □

Proposition 13 (théorème des gendarmes). *Soit a , b et c trois suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n \leq c_n$. Si a et c convergent vers un même réel ℓ alors b converge vers ce même ℓ .*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$. En particulier, $\ell - \varepsilon < a_n$. De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, $|c_n - \ell| < \varepsilon$. En particulier, $c_n < \ell + \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon,$$

et donc $|b_n - \ell| < \varepsilon$. □

Définition 14. Deux suites u et v sont dites adjacentes si

- i. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$;
- ii. u est croissante ;
- iii. v est décroissante ;
- iv. $v - u$ converge vers 0.

Proposition 15. *Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.*

Démonstration. Soit u et v deux suites adjacentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est, par hypothèse, majoré par v_n qui est lui-même, par décroissance de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, majoré par v_0 . La suite u est donc majorée par v_0 . Puisqu'elle est également croissante, elle converge vers un réel ℓ_u d'après la Prop. 12.

On montre de même que v est minorée par u_0 . Sa décroissance implique donc sa convergence vers un réel ℓ_v .

Enfin, par somme de suites convergentes, la suite $v - u$ converge vers $\ell_v - \ell_u$. Mais par hypothèse, cette dernière converge vers 0. On a donc $\ell_u = \ell_v$. $\square$

Remarque 2. Si on relaxe l'hypothèse iv., on peut toujours montrer que les deux suites convergent mais éventuellement vers des limites différentes.

2.3 Critère de Cauchy

Remarque 3. La notion de suite convergente, telle que définie ci-dessus, nécessite de connaître, *a priori*, la limite de la suite. Or on ne peut parler de la limite d'une suite que si l'on sait déjà qu'elle est convergente. La proposition suivante permet de remettre les bœufs devant la charrue.

Proposition 16 (critère de Cauchy). *Une suite u est convergente si et ssi : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, |u_n - u_p| < \varepsilon$.*

Remarque 4. Le critère de Cauchy se traduit par : une suite est convergente s'il existe un rang à partir duquel tous ses termes sont aussi proches les uns des autres que l'on souhaite. Là encore, la notion "d'être aussi proche que l'on souhaite" se traduit par "être à distance inférieure à ε , quelque soit le ε choisi".

Démonstration. L'implication "vérifie le critère de Cauchy" $\Rightarrow$ "converge" est admise. Il s'agit, en effet, de la partie difficile de ce résultat car elle nécessite de construire *ex nihilo* une limite vers laquelle converger.

Montrons l'implication inverse. Pour cela on considère donc une suite u convergeant vers un réel ℓ . On se donne $\varepsilon > 0$. On a alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ et par définition de la convergence de u vers ℓ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors, pour deux indices $n, p \geq N$, on a

$$|u_n - u_p| = |u_n - \ell + \ell - u_p| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Définition 17. Une sous-suite extraite d'une suite u est une suite écrite sous la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

Remarque 5. Extraire une suite de u , cela correspond à ignorer certains termes de u .

Théorème 18 (Bolzano–Weierstrass). *On peut extraire une sous-suite convergente de toute suite bornée.*

Démonstration. Soit u une suite bornée. Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tel que tous les termes de u soient dans l'intervalle $[A, B]$. L'idée va être de considérer récursivement des intervalles de plus en plus petit, mais contenant toujours une infinité de termes de u . Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous allons donc construire A_n, B_n les bornes de l'intervalle considéré à l'instant n et $\varphi(n)$, l'indice du terme de u à prendre comme $n^{\text{ième}}$ terme de la suite extraite.

- i. On commence par poser $A_0 := A, B_0 := B$ et $\varphi(0) = 0$. On a alors $u_{\varphi(0)} \in [A_0, B_0]$.
- ii. Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose A_n, B_n et $\varphi(n)$ construits de sorte à ce que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} | u_k \in [A_n, B_n]\}$ soit infini et contienne en particulier $\varphi(n)$, et de sorte que φ soit strictement croissante sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.
On pose $C_n := \frac{A_n + B_n}{2}$ le milieu de A_n et B_n . Puisque, par hypothèse de récurrence, il y a une infinité d'indices k tels que u_k soit dans $[A_n, B_n]$, cette propriété est encore vraie pour au moins un des deux intervalles $[A_n, C_n]$ et $[C_n, B_n]$. Il y a donc deux possibilités :
 - l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} | u_k \in [A_n, C_n]\}$ est infini, on pose alors $A_{n+1} := A_n$ et $B_{n+1} := C_n$;
 - sinon, c'est que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} | u_k \in [C_n, B_n]\}$ est infini et on pose $A_{n+1} := C_n$ et $B_{n+1} := B_n$.
 Il y a donc une infinité d'indice k tel que $u_k \in [A_{n+1}, B_{n+1}]$. Certains parmi ceux-ci sont donc nécessairement plus grand que $\varphi(n)$. On peut donc poser $\varphi(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} | u_k \in [A_{n+1}, B_{n+1}] \text{ et } k > \varphi(n)\}$.

Nous avons donc construit une suite d'intervalles emboîtés $[A_0, B_0] \supset [A_1, B_1] \supset \dots$ et une application $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [A_n, B_n]$. Les intervalles étant emboîtés, on a donc même, pour tout entier $p \geq n$, $u_p \in [A_n, B_n]$. De plus, à chaque étape, nous avons divisé la largeur de l'intervalle par 2, l'intervalle $[A_n, B_n]$ est donc de largeur $\frac{B-A}{2^n}$.

On définit enfin la suite $v := (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de u . Il découle de ce qui précède qu'elle vérifie le critère de Cauchy et donc qu'elle converge. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \frac{B-A}{2^N} < \varepsilon$. Or, par construction, à partir du rang N , tous les termes de v sont dans l'intervalle $[A_N, B_N]$ dont la largeur est strictement plus petite que ε . On a donc, pour tous entiers $n, p \geq N$, $|v_n - v_p| < \varepsilon$. $\square$

3 Suites divergentes

Définition 19. On dit qu'une suite u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > M$ (resp. $u_n < -M$).

Proposition 20. Une suite croissante (resp. décroissante) est, soit majorée (resp. minorée) et convergente, soit non bornée (resp. non majorée) et divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. Soit u une suite croissante. Si elle est bornée, elle est convergente en vertu de la Prop. 12. Sinon, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M$. Mais comme la suite est croissante, on a alors pour tout entier $n \geq N$, $u_n \geq u_N > M$.

On démontre de même l'affirmation pour les suites décroissantes. $\square$

Proposition 21. Soit u une suite telle que $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N_0 et la suite $\left(\frac{1}{u_n + N_0}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration. Puisque la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $|u_n| > 0$. Mais alors $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n}$ est bien définie.

Soit $\varepsilon > 0$. Par divergence de $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe un entier $N \geq N_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Mais alors $\left|\frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon$. $\square$

Proposition 22. Soit u convergeant vers 0 et dont les termes sont tous strictement positifs. Alors la suite $\frac{1}{u} := \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Il est clair que tous les termes de la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement plus grand que tout $M \leq 0$. Pour tout réel $M > 0$, d'après la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $0 < u_n < \frac{1}{M}$. Mais alors $\frac{1}{u_n} > M$. $\square$