Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales I

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

DURÉE 2H

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1, 2 et 3 ; l'autre les exercices 4 et 5.

Exercice 1. *Questions de cours (5 pts)*

1. Donner la définition d'une suite réelle tendant vers $+\infty$.
2. Ecrire qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
3. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant, respectivement, vers 1 et 2. Montrer, en revenant à la définition, c'est-à-dire en utilisant des quantificateurs et des ε, que la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.

Exercice 2. *Applications (5 pts)*
Soit X et Y deux ensembles et $f\colon X\longrightarrow Y$, $g\colon X\longrightarrow Y$ deux applications.

1. On considère l'application :
$$\psi\colon \begin{array}{ccc} X\times X & \longrightarrow & Y\times Y \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \big(f(x_1),g(x_2)\big) \end{array}.$$
   i. Montrer que, si f et g sont injectives, alors ψ l'est aussi.
   ii. Montrer que, si f et g sont surjectives, alors ψ l'est aussi.
   iii. Montrer que, si f et g sont bijectives, alors ψ l'est aussi. Exprimer ψ^{-1} en fonction de f^{-1} et g^{-1}.
2. On considère maintenant l'application :
$$\delta\colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y\times Y \\ x & \longmapsto & \big(f(x),g(x)\big) \end{array}.$$
   i. Montrer que, si f ou g est injective, alors δ l'est aussi.
   ii. On suppose f et g surjectives. Si vous pensez que δ est alors nécessairement surjective, donnez-en une démonstration. Sinon, donnez un contre-exemple.

Exercice 3. *Arithmétique (3 pts)*
Le but de cet exercice est de calculer 2011^{2012} modulo 9.

1. Prouver qu'un nombre est congru, modulo 9, à la somme des chiffres qui le compose. En déduire $x\in\{0,\cdots,,8\}$ tel que $2011\equiv x$ [9].
2. Trouver la plus petite puissance de 2011 qui soit congrue à 1 modulo 9.
3. En déduire $y\in\{0,\cdots,8\}$ tel que $2011^{2012}\equiv y$ [9].

Exercice 4. *Suites (5 pts)*
Soit u_0 et u_1 deux nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+2} := \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ et $v_n := u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Que peut-on en déduire sur la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre u_n et u_{n+1}.
3. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
4. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 5. *Géométrie (4 pts)*
Dans le plan, on considère les points A, B et C, respectivement de coordonnées $(1, 0)$, $(2, 3)$ et $(3, 3)$.

1. Sur un dessin tracer :
   i. la droite (AB) ;
   ii. la droite Δ, perpendiculaire à (AB) et passant par C ;
   iii. le cercle $\mathcal{C}$ de centre I, le milieu de A et B, et tangent à la droite Δ.
2. Donner les équations cartésiennes et paramétriques de (AB) et Δ.
3. Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.