Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales I

DEVOIR SURVEILLÉ N°3, CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ si et ssi
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M.$$
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée si et ssi
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M.$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée. Alors, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq M$. Or la suite est croissante, donc pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N \geq M$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers $+\infty$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. On a alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_1$, $|u_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_2$, $|v_n - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$.
On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout entier $n \geq N$, on a donc $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ et donc
$$|(u_n + v_n) - 3| = |(u_n - 1) + (v_n - 2)| \leq |u_n - 1| + |v_n - 2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exercice 2.

1. i. Soit $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$ tels que $\psi(x_1, x_2) = \psi(y_1, y_2)$. On a alors $\big(f(x_1), g(x_2)\big) = \big(f(y_1), g(y_2)\big)$ et donc $f(x_1) = f(y_1)$ et $g(x_2) = g(y_2)$. Or les applications f et g sont injectives, donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$. On a donc $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. L'application ψ est injective.
   (a) Soit $(y_1, y_2) \in Y \times Y$. La fonction f étant surjective, il existe $x_1 \in X$ tel que $f(x_1) = y_1$. De même, g étant surjective, il existe $x_2 \in X$ tel que $g(x_2) = y_2$. On en déduit que $\psi(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ et l'application ψ est surjective.
   (b) D'après les deux questions précédentes, si f et g sont bijectives, alors ψ l'est aussi. On a de plus, pour tout $(y_1, y_2) \in Y \times Y$, $\psi\big(f^{-1}(y_1), g^{-1}(y_2)\big) = \Big(f\big(f^{-1}(y_1)\big), g\big(g^{-1}(y_1)\big)\Big) = (y_1, y_2)$ et donc $\psi^{-1}(y_1, y_2) = \big(f^{-1}(y_1), g^{-1}(y_2)\big)$.
2. i. Supposons que f est injective et prenons $x, y \in X$ tels que $\delta(x) = \delta(y)$. On a alors $\big(f(x), g(x)\big) = \big(f(y), g(y)\big)$ et donc $f(x) = f(y)$. Par injectivité de f, on en déduit que $x = y$.
   Si g est injective, on raisonne de même.
   ii. Les surjectivités de f et g ne sont pas suffisantes pour déduire celle de δ. Par exemple, on peut prendre $X = Y = \{1, 2\}$, $f \colon X \longrightarrow Y$ l'application identité et $g \colon X \longrightarrow Y$ définie par $g(1) = 2$ et $g(2) = 1$. On a alors $\delta(1) = (1, 2)$ et $\delta(2) = (2, 1)$. Les éléménts $(1, 1)$ et $(2, 2)$ ne sont jamais atteints.

Exercice 3.

1. Si $n \in \mathbb{N}$ s'écrit $a_k a_{k-1} \cdots a_0$, c'est que l'on a $n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$. Or $10 \equiv 1$ [9], on a donc
$$n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i 1^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \ [9].$$
On en déduit $2011 \equiv 2 + 1 + 2 \equiv 4$ [9].

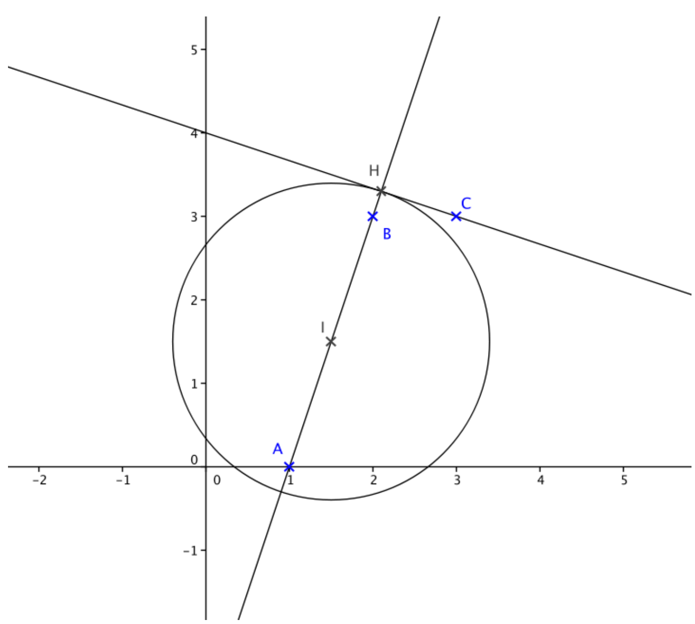
2. Zero est évidemment la plus petite puissance de 2011 qui soit congrue à 1 modulo 9. Mais si on veut faire avancer le problème, on peut constater que $2011^1 \equiv 4$ [9], $2011^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 7$ [9], $2011^3 \equiv 2011^2 \times 2011 \equiv 7 \times 4 \equiv 28 \equiv 1$ [9]. La plus petite puissance non nulle de 2011 congrue à 1 modulo 9 est donc 3.
3. On a $2012 = 3 \times 670 + 2$ et donc $2011^{2012} = (2011^3)^{670} \times 2011^2 \equiv 1^{670} \times 7 \equiv 7$ [9].

Exercice 4.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$v_{n+1} = u_{n+2} + \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = v_n.$$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à $v_0 = u_1 + \frac{u_0}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = v_n = u_1 + \frac{u_0}{2}$.
3. On cherche $\alpha, q \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha} = q$. Or
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha} = q \quad &\Longleftrightarrow \quad u_{n+1} - \alpha = q(u_n - \alpha) \\ &\Longleftrightarrow \quad u_1 + \frac{u_0}{2} - \frac{1}{2}u_n - \alpha = qu_n - q\alpha \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha(q-1) + u_1 + \frac{u_0}{2} = u_n(q + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$
Pour que cette dernière égalité soit toujours vérifiée, on peut prendre $q = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{u_1 + \frac{u_0}{2}}{1-q} = \frac{u_0+2u_1}{3}$.
4. La suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \alpha = q^n(u_0 - \alpha)$. Or $u_0 - \alpha = u_0 - \frac{u_0+2u_1}{3} = 2\frac{u_0-u_1}{3}$. On en déduit que
$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{2u_0 - 2u_1}{3} + \frac{u_0 + 2u_1}{3}.$$
5. On a $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit que $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{2u_0-2u_1}{3}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{u_0+2u_1}{3}$.

Exercice 5.

1.



2. La droite (AB) passe par $A=(1,0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}=(1,3)$. Une équation paramétrique de (AB) est donc
$$(AB)=\big\{(1+\lambda,3\lambda)\big|\lambda\in\mathbb{R}\big\}.$$
Un point $M=(x,y)$ est sur (AB) si et ssi les vecteurs $\overrightarrow{AM}=(x-1,y)$ et $\overrightarrow{AB}=(1,3)$ sont colinéaires, c'est-à-dire, si et ssi leur déterminant (ou produit croisé) $3(x-1)-y$ s'annule. Une équation cartésienne de (AB) est donc
$$(x,y)\in(AB)\iff 3x-y-3=0.$$
On peut lire au passage que le vecteur $\overrightarrow{n}=(3,-1)$ est un vecteur normal pour (AB).
Puisque la droite δ est orthogonale à (AB), le vecteur $\overrightarrow{n}$ ci-dessus est un vecteur directeur pour Δ. De plus, $C\in\Delta$. Une équation paramétrique de Δ est donc
$$\Delta=\big\{(3+3\lambda,3-\lambda)\big|\lambda\in\mathbb{R}\big\}.$$
Un point $M=(x,y)$ est sur Δ si et ssi les vecteurs $\overrightarrow{CM}=(x-3,y-3)$ et $\overrightarrow{AB}=(1,3)$ sont orthogonaux, c'est-à-dire, si et ssi leur produit scalaire $(x-3)+3(y-3)$ s'annule. Une équation cartésienne de Δ est donc
$$(x,y)\in\Delta\iff x+3y-12=0.$$

3. On note $H=(AB)\cap\Delta$. Le cercle $\mathcal{C}$ est alors le cercle de centre I et de rayon $IH=|\overrightarrow{IH}|$.
Or $H\in(AB)$ donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $H=(1+\lambda,3\lambda)$. Et $H\in\Delta$, donc $(1+\lambda,3\lambda)$ satisfait l'équation cartésienne de Δ, c'est-à-dire $1+\lambda+9\lambda-12=0$. Cela donne $\lambda=\frac{11}{10}$. On en déduit que $H=\left(\frac{21}{10},\frac{33}{10}\right)$. Or $I=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. On a donc $IH=\sqrt{\left(\frac{21}{10}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{33}{10}-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{6}{\sqrt{10}}$. Une équation cartésienne pour $\mathcal{C}$ est donc
$$(x,y)\in\mathcal{C}\iff\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{18}{5}=0\iff x^2+y^2-3x-3y+\frac{9}{10}=0.$$