Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales I

Parcours PEIP

Devoir surveillé N ° 5

corrigé partiel

Exercice 1.

1. On procède par double inclusion.

   $\underline{f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)}$ **:** Soit $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
   Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$. Si $x \notin A$, c'est alors que $x \in B$ et donc $y \in f(B)$.
   Dans les deux cas, on a bien $y \in f(A) \cup f(B)$.

   $\underline{f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)}$ **:** Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
   Mais alors $x \in A \cup B$ et donc $y \in f(A \cup B)$.
   Si $y \notin f(A)$, alors y est nécessairement dans $f(B)$ et il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Or dans ce cas, on a aussi $x \in A \cup B$ et de fait $y \in f(A \cup B)$.
   Dans les deux cas, on a bien $y \in f(A \cup B)$.

2. On sait que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\cos(a)$ et $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\,|\sin(a)|$. On en déduit

$$(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 - ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2\big(\cos^2(a) - \sin^2(a)\big) = ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2\cos(2a).$$

3. Par exemple, les suites $\big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(n \text{ si } n \text{ est pair, } 0 \text{ sinon}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(n\sin(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont ni bornées, ni convergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercice 2. L'équation homogène associée est $(x^2+1)^2y' + 2x(x^2+1)y = 0$, équivalente à $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$. La dérivé de $\big(x \mapsto \ln(x^2+1)\big)$ étant $\big(x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}\big)$, les solutions de l'équation homogène associée sont exactement les fonctions de la forme $f(x) = Ae^{-\ln(x^2+1)} = \frac{A}{x^2+1}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Cherchons maintenant une solution particulière f_0. On utilise pour cela la méthode de la variation de la constante. On pose donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{g_0(x)}{x^2+1}$ avec g_0 une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0'(x) = \frac{g_0'(x)}{x^2+1} - \frac{2xg_0(x)}{(x^2+1)^2}$. En injectant cela dans l'équation différentielle, on obtient $(x^2+1)g_0'(x) = 1$ ou encore $g_0'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On peut prendre $g_0(x) = \arctan(x)$.

Au final, les solutions des l'équation différentielle sont exactement les fonctions de la forme

$$f(x) = \arctan(x) + \frac{A}{x^2+1} \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.

1. Il faut choisir 5 cartes non ordonnées parmi les 32 du jeu. Il y a donc $\binom{32}{5} = 201\ 376$ mains possibles.
2. Il faut d'abord choisir une couleur (4 possibilités), puis 5 cartes parmi les 8 cartes de cette couleur ($\binom{8}{5}$ possibilités). Il y a donc $4\binom{8}{5} = 224$ mains d'une seule couleur possibles.
3. On choisit d'abord l'As parmi les 4 possibles, puis les 4 autres cartes parmi les 28 qui ne sont pas des As. Il y a donc $4\binom{28}{4} = 81\ 900$ mains contenant exactement un As.

4. On commence par dénombrer les mains ne contenant PAS au moins deux As. On sait déjà qu'il y en a $4\binom{28}{4} = 81\ 900$ contenant exactement un As. Pour former une main sans As, il suffit de choisir les 5 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des As. Il y a donc $\binom{28}{5} = 98\ 280$ mains sans As et, de fait, $4\binom{28}{4} + \binom{28}{5} = 180\ 180$ mains contenant moins de deux As. Or il y a $\binom{32}{5} = 201\ 376$ mains en tout, on trouve donc $\binom{32}{5} - 4\binom{28}{4} - \binom{28}{5} = 21\ 196$ mains contenant au moins deux As.

Exercice 4. Notons $F(X) := \frac{X^5-2X^4+4X^2-5X+1}{X^3-2X^2+X}$.
Par division euclidienne, on a $X^5 - 2X^4 + 4X^2 - 5X + 1 = (X^2 - 1)(X^3 - 2X^2 + X) + 2X^2 - 4X + 1$ et donc $F(X) = X^2 - 1 + \frac{2X^2-4X+1}{X^3-2X^2+X}$.
Le dénominateur se factorise en $X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$. D'après le théorème de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\frac{2X^2-4X+1}{X^3-2X^2+X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$.
En multipliant par $(X-1)^2$, on obtient $\frac{2X^2-4X+1}{X} = \frac{a(X-1)^2}{X} + b(X-1) + c$. En évaluant en 1, cela donne $c = -1$. En dérivant, on trouve $\frac{X(4X-4)-(2X^2-4X+1)}{X^2} = \frac{2X^2-1}{X^2} = a(X-1)\big(2 + X(X-1)\big) + b$, ce qui, en évaluant en 1, donne $b = 1$.
De même, en multipliant $\frac{2X^2-4X+1}{X^3-2X^2+X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$ par X et en évaluant en 0, on trouve $a = 1$.

Au final, on a $F(X) = X^2 - 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{(X-1)^2}$.

Exercice 5.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $k \geq N_1$, $|u_{2k} - \ell| < \varepsilon$.
   La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $k \geq N_2$, $|u_{2k+1} - \ell| < \varepsilon$.
   On pose $M = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $m > M$.
   Si m est pair, alors $m = 2k$ avec $k > N_1$ et donc $|u_m - \ell| < \varepsilon$.
   Si m est impair, alors $m = 2k + 1$ avec $k > N_2$ et donc $|u_m - \ell| < \varepsilon$.
   On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. Avec les définitions données dans l'énoncé, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 0$ et $x_n = -\frac{1}{2n+1}$. Il est donc clair que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (car constante) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < w_n$. Les suites sont donc adjacentes.

   On peut également supposer que les doigts de l'auteur du sujet ont fourché et qu'il voulait plutôt écrire

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

   Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$w_{n+1} = w_n - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = w_n - \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} < w_n \ ;$$

   $$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = x_n + \frac{1}{2(n+1)(2n+3)} > x_n \ ;$$

   $$x_n = w_n - \frac{1}{2n+1} < w_n.$$

   On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < w_n$; autrement dit que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

   Dans les deux cas, on peut en déduire que les $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite et cela implique, d'après la question 1, que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 6.

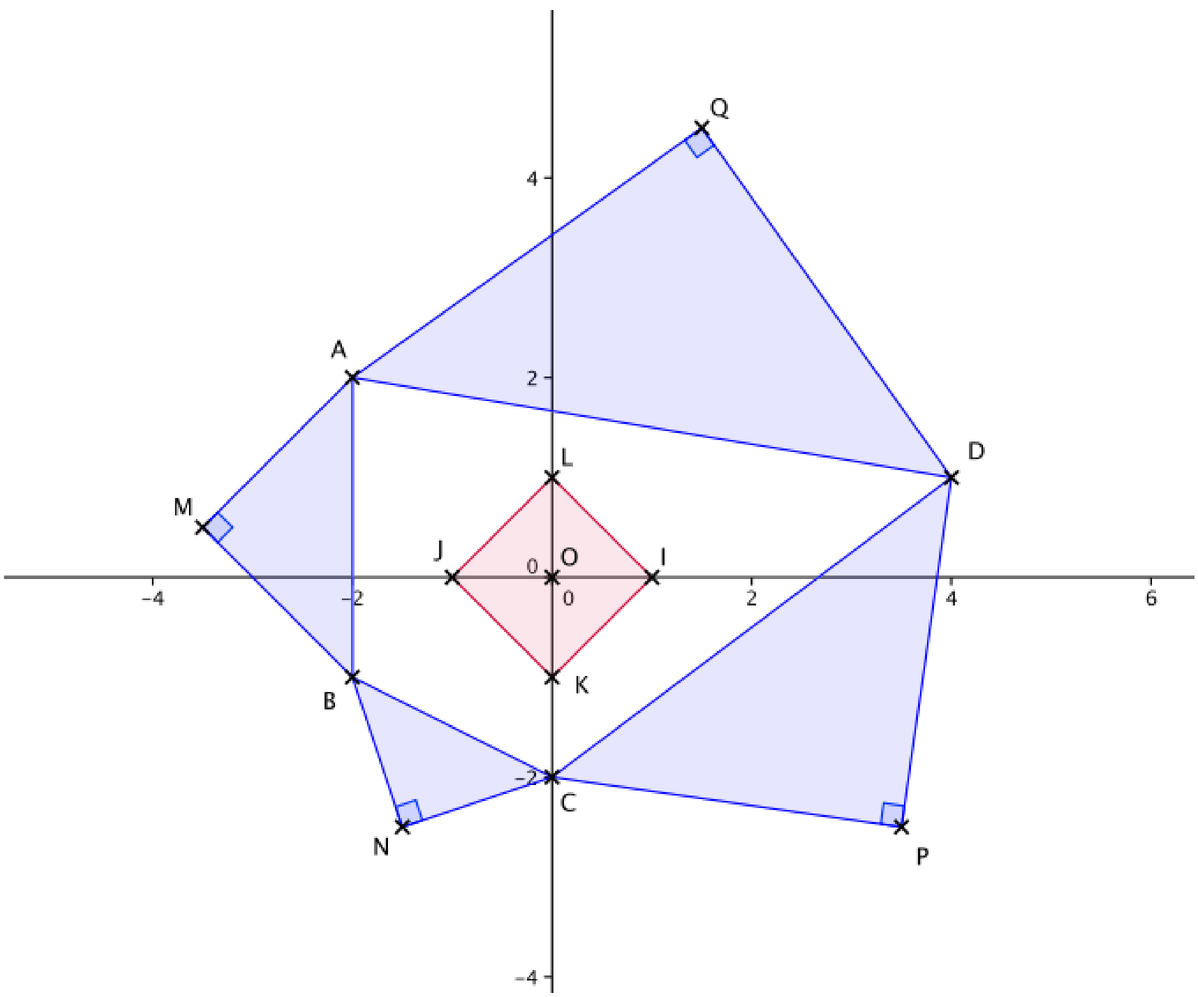
1-2. Par le binôme de Newton, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X+1)^n = X^n + nX^{n-1} +$ (termes de degré $< n$) et $(X-1)^n = X^n - nX^{n-1} +$ (termes de degré $< n$). En en déduit que $(X+1)^n - (X-1)^n = 2nX^{n-1} +$ (termes de degré $< n$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\deg(P_n) = n-1$ et le coefficient dominant de P_n vaut $2n$.

3. Le terme constant de $(X+1)^n$ vaut 1 et celui de $(X-1)^n$ $(-1)^n$. Le terme constant de P_n est donc $1+(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire 2 si n est pair, 0 si n est impair.
   En particulier, si n est pair, P_n se factorise par X et 0 est alors racine évidente.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n(1) = 2^n$. L'entier 1 n'est donc jamais racine de P_n. En particulier, si a est racine de P_n, on a $a \neq 1$. Mais on a aussi $(a+1)^n - (a-1)^n = 0$ et donc $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^n = 1$. On en déduit que $\frac{a+1}{a-1}$ est racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
5. D'après ce qui précède, si a est racine de P_n, on a $\frac{a+1}{a-1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Mais alors $a+1 = (a-1)e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et donc $a(e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1$. En particulier $k \neq 0$ (car $0 \neq 2$) et on a
$$a = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}})}{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}})} = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)},$$
   avec, lorsque n est pair, la convention $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$.
   Réciproquement, en remontant les calculs, on vérifie que $\left\{-\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \middle| k \in [\![1, n-1]\!]\right\}$, donne bien $n-1$ racines pour P_n. Ces racines sont toutes distinctes car la fonction tangente est strictement croissante, positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et négative sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Enfin, on a bien toutes les racines puisque P_n est de degré $n-1$.
6. D'après les questions 2. et 5., on a
$$P_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + \frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right).$$
   En développant le produit, on obtient que le terme constant de P_n vaut $2n$ multiplié par le produit des opposés des racines. Or d'après la question 3. le terme constant vaut 2 si n est impair, 0 si n est pair. On en déduit que le produit des racines vaut $\frac{1}{n}$ si n est impair (il y a alors un nombre pair de racines, les signes $-$ s'annulent donc deux à deux) et 0 si n est pair.
7. D'après ce qui précède, on a
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2p+1} &= \prod_{k=1}^{2p} \frac{-i}{\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} \\
&= \frac{(-i)^{2p}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{2p} \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} \\
&= \frac{(-1)^p}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\left(\displaystyle\prod_{k=p+1}^{2p} \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)} \\
&= \frac{(-1)^p}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \tan\left(\frac{(2p+1-k)\pi}{2p+1}\right)\right)} \\
&= \frac{(-1)^p}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2p+1} &= \frac{(-1)^p}{\left(\prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{p}-\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)} \\
&= \frac{(-1)^p}{(-1)^p\left(\prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \sqrt{2p+1}$.

Exercice 7.

1. 

2. Les points I et J étant respectivements les milieux des segments $[BD]$ et $[AC]$, on a $f = \frac{b+d}{2}$ et $g = \frac{a+c}{2}$. L'affixe du milieu du segment $[IJ]$ est donc $\frac{a+b+c+d}{4}$.

3. Par construction, on a $||\overrightarrow{MA}|| = ||\overrightarrow{MB}||$ et $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\frac{a-m}{b-m} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et donc $a - m = i(b-m)$, ce qui donne $m(1-i) = a - ib$ ou encore $m = \frac{a-ib}{1-i}$.
De même, on trouve $n = \frac{b-ic}{1-i}$, $p = \frac{c-id}{1-i}$ et $q = \frac{d-ia}{1-i}$.

4. L'affixe de l'isobarycentre des points M, N, P et Q est $\frac{a-ib+b-ic+c-id+d-ia}{4(1-i)} = \frac{a+b+c+d}{4}$. Ce point est donc confondu avec le milieu du segment $[IJ]$.
   De plus, on a
$$\begin{aligned}\mathrm{Bar}\big((M,1);(N,1);(P,1);(Q,1)\big) &= \mathrm{Bar}\Bigg(\bigg(\mathrm{Bar}\big((M,1);(P,1)\big),2\bigg);\bigg(\mathrm{Bar}\big((N,1);(Q,1)\big),2\bigg)\Bigg)\\ &= \mathrm{Bar}\big((K,2);(L,2)\big)\\ &= \mathrm{Bar}\big((K,1);(L,1)\big).\end{aligned}$$
   L'isobarycentre des points M, N, P et Q correspond donc au milieu du segment $[KL]$.
5. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OJ}$ vaut $g - \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{a+c}{2} - \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{a+c-b-d}{4}$, et celui du vecteur $\overrightarrow{OK}$
$$\begin{aligned} k - \frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{a-ib+c-id}{2(1-i)} - \frac{a+b+c+d}{4}\\ &= \frac{2(a+c)-2i(b+d)-(a+b+c+d)(1-i)}{4(1-i)}\\ &= \frac{(1+i)(a+c)-(1+i)(b+d)}{4(1-i)}\\ &= \frac{(1+i)^2(a+c)-(1+i)^2(b+d)}{4(1-i)(1+i)}\\ &= \frac{2i(a+c)-2i(b+d)}{8}\\ &= i\frac{a+c-b-d}{4}.\end{aligned}$$
   On en déduit que K est l'image de J par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O.
6. D'après les questions précédentes, les diagonales du quadrilatère $IJKL$ se coupent orthogonalement en leurs milieux. Le quadrilatère est donc un losange. Or de plus, $OJ = OK$ avec O milieux commun des segments $[IJ]$ et $[KL]$, les diagonales ont donc même longueur. Le losange est donc même un carré.