Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales I

Parcours PEIP

Interrogation 9

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 := 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} := \frac{u_n}{2} + 3$.

i. Trouver α telle que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer u_n en fonction de n.

iii. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

i. Enoncer le critère de Cauchy.

ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

iii. Déduire des deux points précédents que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

iv. Que dire de la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}\right)_{k\geq 2}$?