

Mathématiques Générales I

PLANCHE 2 - FONCTIONS USUELLES

Fonctions trigonométriques.

Exercice 1. Résoudre les équations $\cos(2x - \frac{5\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ et $\tan 3x = \tan x$

Exercice 2. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Exercice 3. 1. En utilisant le produit scalaire dans le plan euclidien, montrez que

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

En déduire $\cos(x + y)$ en fonction de $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ et $\sin y$.

2. Calculer $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $\sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels on a $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$.

3. Calculer $\sin(x - y)$ et $\sin(x + y)$ en fonction de $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ et $\sin y$.

4. Calculer $\tan(x + y)$ et $\tan(x - y)$ en fonction de $\tan x$ et $\tan y$. Préciser les valeurs de x et y qui conviennent.

5. Pour tout réel x , établir trois expressions de $\cos 2x$. En déduire des formules de linéarisation de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$. En précisant les valeurs de x qui conviennent, établir les expressions de $\sin 2x$ et $\tan 2x$.

6. Montrer que, pour des valeurs de x que l'on précisera, si $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

7. Simplifier $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$ et $\tan(\pi - x)$ (pour la dernière expressions, préciser les valeurs de x). De même pour $\cos(\pi + x)$, $\sin(\pi + x)$ et $\tan(\pi + x)$.

8. Montrer les formules

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan complexe, soit M le point d'affixe e^{ix} . On note A le point d'affixe 1, B le projeté orthogonal de M sur l'axe des x et C le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$. En comparant l'aire du triangle OBM , l'aire de la portion de disque OAM et l'aire du triangle OAC , montrez que

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

En déduire la limite quand x tend vers 0 de $\frac{\sin x}{x}$.

Montrer que les fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$ sont dérivables et calculer les dérivées.

Tracer leur graphe.

Fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice 5. Rappel les définitions de $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ et $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Résoudre les équations $\cos x = a$, $\sin x = a$ et $\tan x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Etudier la dérivabilité des fonctions précédentes et calculer les dérivées.

Exercice 7. Exprimer différemment $\arctan a + \arctan b$

Fonction $\ln$ et fonction $\exp$.

Exercice 8. En étudiant deux fonctions, montrez l'inégalité suivante, due à Neper :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$$

Exercice 9. 1. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 10^x \in \mathbb{R}$. En écrivant que $f(x) = \exp(x \ln 10)$, expliciter f^{-1} que l'on note $\log$.

2. Si n est un entier naturel et $C(n)$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n , exprimer $C(n)$ en fonction de $\log n$.

3. Application numérique : calculer le nombre de chiffres des nombres suivants :

$$9^{(9^9)}, \quad 2^{106}(2^{107} - 1).$$

Exercice 10. Montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

(faire une récurrence et intégrer).

Montrez que

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

En déduire que

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Fonctions hyperboliques.

Exercice 11. On définit les fonctions ch , sh et th (appelées fonctions hyperboliques) par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}.$$

Etudiez les fonctions ch , sh et th et tracer leur courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrez que ces fonctions sont dérivables et calculez les dérivées.

Montrez que, pour tout réel x , $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Montrez des formules analogues aux formules prouvées dans l'exercice 5.

Définir des fonctions réciproques (notées $\arg \operatorname{ch}$, $\arg \operatorname{sh}$ et $\arg \operatorname{th}$). On pourra les expliciter.

Calculer les dérivées de ces fonctions réciproques.

Fonction exponentielle complexe.

Exercice 12. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Dédurre de la formule $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$ les formules de duplication pour $\cos$ et $\sin$ obtenues dans l'exercice 5.

Exercice 13. Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $r \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A \cos x + B \sin x = r \cos(x - \varphi).$$

Exercice 14. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx, \quad \sin x + \cdots + \sin nx.$$

Plus difficile...

Exercice 15. Etude et représentation graphique de la fonction $x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}$.

Exercice 16. Etude et représentation graphique de la fonction $f: x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$.

Exercice 17. Montrer:

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1], \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\pi}{2} \\ \forall x \in]0, 1], \quad 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 18. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \arctan(x) + \arctan(2x) &= \frac{\pi}{4}. \\ \arccos(x) &= \arcsin(2x) \end{aligned}$$

Exercice 19. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \operatorname{th}(2^k x).$$

Exercice 20. Pour $(n; x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$ montrer que:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{k=n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2^n \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Montrer que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t} = 1.$$

En déduire la limite de $P_n(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.