Université de Provence 2011–2012

**Mathématiques Générales I**

PLANCHE 7

GÉOMÉTRIE.

**Exercice 1.** Le plan et l'espace étant rapportés à un repère orthonormé, vérifier que les repères suivants sont également orthonormés :

dimension 2 :

$$\overrightarrow{U}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad \overrightarrow{V}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

dimension 3

$$\overrightarrow{U}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\qquad \overrightarrow{V}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\qquad \overrightarrow{W}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

**Exercice 2.** On considère le plan rapporté à un repère orthonormé. Ecrire l'équation du cercle de centre $I=(1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

**Exercice 3.** Soient $A(1,2)$ et $B(-1,3)$ dans le plan raporté à un repère orthonormé. Quel est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux ?

**Exercice 4.** On considère les trois points $A(3,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$ et $C(-2,2,1)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

**Exercice 5.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace. Montrer que

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

Que peut-on en déduire si, dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont formées d'arêtes orthogonales ?

Que peut-on aussi en déduire si dans un quadrilatère plan, les côtés opposés sont perpendiculaires ?

Dessiner un tel quadrilatère.

**Exercice 6.** (*Extrait du DS n$^o$4 posé en 2009-2010.*) Dans le plan complexe, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes $a$, $b$ et $c$.

1. Rappeler les expressions des normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.
2. Donner la formule montrant que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AC}$ par une rotation de centre $A$ et d'angle $\alpha$.
3. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et donc du triangle $ABC$ si

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\qquad\text{ou}\qquad\frac{b-a}{c-a}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\qquad ?$$

4. Montrez que le triangle $ABC$ est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

**Exercice 7.** Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonorm direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(1,0,1)$ ; $\vec{v}(2,1,0)$ et $\vec{w}(1,-1,2)$.

Calculer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. Qu'en déduit-on pour le produit vectoriel ?

**Exercice 8.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points quelconques de l'espace orienté. Montrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}.$$

**Exercice 9.** (*Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.*) Soient $A(1,1,1)$, $B(2,1,0)$ et $C(2,2,1)$ trois points de l'espace.

1. Vérifier que ces points ne sont pas alignés.
2. Calculer l'aire du triangle $ABC$. En déduire la valeur absolue du sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.
3. Donner un vecteur de norme 1 orthogonal au plan $P$ défini par les points $A$, $B$ et $C$.

**Exercice 10.** (*Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.*) Soit $P$ le plan d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + s \\ z = 2t - s \end{cases} \qquad \text{avec } (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

1. Vérifier que l'origine $O(0,0,0)$ et le point $A$ de coordonnées $(3,5,1)$ appartiennent à $P$.
2. Déterminer l'équation cartésienne de $P$ et donner un vecteur normal au plan $P$.
3. Donner une équation paramétrique de la droite passant par $A$ et perpendiculaire à $P$.

**Exercice 11.** (*Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.*) Soit $P$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une équation paramétrique de la droite $D$ passant par $M_0$ et orthogonale au plan $P$.
2. Donner le point d'intersection entre $D$ et$P$.
3. Montrer que la distance entre $M_0$ et $P$ est donnée par

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4. En déduire les coordonnées du symétrique de $M_0$ par rapport au plan $P$.

**Exercice 12.** (*Extrait du DS n°4 posé en 2008-2009.*) Soient $D$ et $D'$ deux droites de l'espace. Si $H$ est un point de $D$ et $H'$ un point de $D'$ qui sont tels que la droite $(HH')$ soit orthogonale à $D$

et orthogonale à $D'$, on dit que $(HH')$ est la perpendiculaire commune à $D$ et $D'$, et que $HH'$ est la distance entre $D$ et $D'$.

Soient les deux droites

$$D \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D' \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = -2t \end{cases}$$

1. Donner des vecteurs directeurs de $D$ et $D'$ puis un vecteur directeur d'une éventuelle perpendiculaire commune à $D$ et $D'$.
2. On note $(x_H, y_h, z_h) = (1 + t_H, 1 - t_H, t_H)$ où $t_H \in \mathbb{R}$, les coordonnées d'un point $H \in D$. Donner l'équation paramétrique de la droite $\Delta_H$ passant par $H$ et perpendiculaire aux vecteurs directeurs de $D$ et $D'$. Montrez qu'il existe un et un seul point $H \in D$ tel que $\Delta_H$ coupe $D'$. Calculez les coordonnées de ce point $H$, puis celle du point d'intersection $H'$ de $\Delta_H$ et de $D'$.
3. Montrez que la perpendiculaire commune à $D$ et $D'$ existe et est unique, et en donner une équation paramétrique.
4. Calculer la distance entre $D$ et $D'$.

**Exercice 13.** On considère un triangle $MAB$. On note $A'$ et $B'$ les mieux respectifs des segments $[MB]$ et $[MA]$. Soit $H$ le barycentre de $(A; 2)$ ; $(M; 5)$ et $K$ le barycentre de $(A; 2)$ ; $(B; 3)$ et $(M; 5)$.

1. Montrez que $K$ est le barycentre de $(H; 7)$ ; $(B; 3)$ et que $K$ est aussi barycentre de $(A'; 3)$ $(B'; 2)$.
2. En déduire que $K$ est le point d'intersection des droites $(A'B')$ et $(BH)$. Faire un dessin.
3. La droite $(MK)$ coupe la droite $(AB)$ en $R$. Montrez que $R$ est barycentre de $(A; 2)$ ; $(B; 3)$.
4. On suppose que le point $M$ décrit un cercle de centre $A$ et de rayon $r$. Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble décrit par le point $K$.