Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales I

PLANCHE 8

POLYNÔMES. FRACTIONS RATIONNELLES.

Polynômes

Exercice 1. Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2. Déterminer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 3. Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes suivants:

i) $X^2 + X + 1$ ii) $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ iii) $X^6 + 1$

iv) $X^4 + X^2 + 1$. v) $X^3 + X^2 + X + 1$ vi) $X^3 + c$, pour $c \in \mathbb{R}$.

Ecrire la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$ des polynômes ci-dessus. En déduire leur décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Considérons le polynôme $X^2 + bX + c$, et ses deux racines λ_1 et λ_2.

1) Exprimez en fonction b et c la somme des racines $\lambda_1 + \lambda_2$. Faire de même pour le produit des racines $\lambda_1\lambda_2$.

2) On cherche à résoudre le système d'équations $\begin{cases} u + v = 3 \\ u\,v = -2 \end{cases}$

a) Montrer que u et v sont les deux racines du polynômes $X^2 - 3X - 2$.

b) Résoudre le système d'équations.

3) Appliquer la même méthode pour le système $\begin{cases} u + v = 1 + i \\ u\,v = i \end{cases}$

Exercice 5. Polynômes bi-carrés
Voici un exemple de polynôme de degré 4 dont on sait trouver les racines. Ce sont les polynômes bi-carrés qui sont de la forme:

$$P(X) = X^4 + bX^2 + c$$

4) Poser $Y = X^2$. Trouver un polynôme Q de degré deux tel que $Q(Y) = P(X)$. Quelles sont les racines de Q ?

5) En déduire les racines de P.

6) Applications: Quelles sont les racines de $X^4 - 3X^2 + 1$? Et celles de $X^6 - 3X^2 + 2$?

Exercice 6. Division euclidienne

7) Effectuer la division euclidienne de P par Q pour les polynômes P et Q suivants:

i) $P = X^3 + 1$, $Q = X^2 + 1$ ii) $P = X^4 - 1$, $Q = X^2 - 1$

iii) $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, $Q = X^2 - 1$

8) Les polynômes P et Q ci-dessus sont-ils premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$?

9) Pour les polynômes ci-dessus qui sont premiers entre eux, trouver U et $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $U\,P + V\,Q = 1$.

Exercice 7. Trouver les restes des divisions euclidiennes de

$$(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$$

par $(X-3)(X-2)$, $(X-3)^3$, $(X-2)^2$ et $(X-3)^2(X-2)^2$.

Exercice 8. Quelles sont les racines du polynôme :

$$1 - \frac{X}{1} + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}.$$

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. On note, pour $p < n$, u_p la somme des racines de $P^{(p)}$. Démontrer que $u_0, \ldots, u_{n-1}$ forme une progression arithmétique.

Exercice 10. Soit, pour $n \geq 0$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Démontrer que P_n admet n racines simples.
2. Démontrer que, si n est impair, une et une seule de ces racines est réelle, et que si n est pair, aucune des racines n'est réelle.

Exercice 11. Polynômes de Chebyshev

Les polynômes de Chebyshev sont définit par récurrence de la manière suivante:

$$\begin{cases} P_0 = 1, & , P_1 = X \\ \forall n \geq 1, & P_{n+1} = 2X\,P_n - P_{n-1} \end{cases}$$

10) Calculer P_2,P_3,P_4.

11) Déterminer (par récurrence) le degré de P_n, et son coefficient dominant.

12) Rappeler la formule permettant d'exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction $\cos(\theta)$. Comparer avec $P_2(\cos(\theta))$.

13) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Fractions rationnelles

Exercice 12. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{X^3 - X}$ **2.** $\dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$ **3.** $\dfrac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

4. $\dfrac{2X^2 + 1}{(X^2 - 1)^2}$ **5.** $\dfrac{X^3 + 1}{(X-1)^3}$ **6.** $\dfrac{X^4 + 1}{(X+1)^2(X^2+1)}$

Exercice 13.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

2. En déduire la limite de la suite (S_n) suivante : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 14. Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$ **2**. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

3. $x \mapsto \dfrac{x^3+2x}{x^2+x+1}$ **4**. $x \mapsto \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$

Calcul de la somme des $\frac{1}{k^2}$.

On se propose de calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

en suivant un raisonnement original de Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand du début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2n+1)x = \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x)^{2n+1}$.

En déduire que

$$\sin(2n+1)x = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} x \cos^{2n-2k} x.$$

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $\mathrm{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$.

Soit P_n le polynôme défini par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k X^{n-k}.$$

Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = P_n(\mathrm{cotan}^2 x).$$

3. Montrez que les nombres $\mathrm{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}$ pour $k = 1, \ldots, n$ sont tous distincts et sont les racines de P_n.

4. Si un polynôme de degré n qui possède n racines distinctes s'écrit

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$

exprimez la somme de ses racines en fonction de a_n et a_{n-1}.

En déduire la valeur de
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

5. Montrez que
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \operatorname{cotan}^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2 x.$$

6. En déduire un encadrement de
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

7. Calculer
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$