Université Aix-Marseille
Martine Quinio 2013

Equations différentielles pour SV

1 Equations différentielles du premier ordre

Les équations du type : (E)

$$a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

se résolvent sur tout intervalle I de x où les fonctions a, b, c sont définies et où a ne s'annule pas.

1.1 Méthode de résolution

1) On résout léquation homogène ; on dit aussi léquation sans second membre :

$$a(x)y\prime(x) + b(x)y(x) = 0$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$z(x) = K\exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)})dx$$

2) On cherche une solution particulière y_0
3) Les solutions de l'équation sont :

$$y\,(x) = z(x) + y_0(x)$$

Les courbes des fonctions solutions s'appellent **Courbes intégrales**
4) Si une condition est donnée : $y\,(A) = B$
Alors il y a solution unique
Ainsi, une seule courbe intégrale passant par un point donné de coordonnées (A,B)

1.2 Cas des équations à coefficients constants

Où : a et b sont des constantes, $a \neq 0, f$ une fonction usuelle :
$f_1(x) = P(x)$ un polynôme
$f_2(x) = asin\varpi x + bcos\varpi x$
$f(x) = e^x f_i(x)$

Les solutions de l'équation

$$ay\prime(x) + by(x) = f(x)$$

sont :

$$y(x) = K\exp(-\frac{b}{a}x) + g(x)$$

où $g(x)$ est une fonction de même type que celle du second membre.
On obtient g par identification.

Exemple 1 *L'équation différentielle* $2y\prime(x) + y(x) = x$ *:*

Les solutions de l'équation homogène associée sont : $y_1(x) = Ke^{-\frac{1}{2}x}$;

Une solution particulière est un polynôme du premier degré : $y_0(x) = ax + b$:On obtient facilement par identification : $a = 1$ et $b = -2$:

Les solutions de l'équation différentielle $2y\prime(x) + y(x) = x$ sont, sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = x - 2 + Ke^{-\frac{1}{2}x}$$

Exemple 2 *L'équation différentielle*

$$y\prime(x)cosx + y(x)sinx = 1$$

a pour solution sur tout intervalle I de x où cos ne s'annule pas : .$y(x) = K\cos x + \sin x$*. En effet : sur* $I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, les solutions de l'équation homogène associée :

$y\prime(x)cosx + y(x)sinx = 0$ *sont :* $y_1(x) = K\exp(-\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx) = K\exp(\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx) = K\exp(\ln|\cos x|) = K\cos x$:

Remarquons, pour enlever la valeur absolue, que sur I, cos garde un signe constant. Il n'est pas utile d'écrire $y_1(x) = K\cos x$ ou $y_1(x) = -K\cos x$, K étant indéterminée.

Enfin, il est facile de vérifier que la fonction sin est une solution particulière.

1.3 Equations à variables séparables

Certaines équations (fréquentes) sont de la forme : (ou s'y ramènent)

$$f(y).y\prime(t) = g(x).x\prime(t)$$

On dit que l'**équation est à variables séparables ;**

Exemple 3 *Soit à résoudre l'équation :* $y^2(t)y'(t) = x(t)x'(t)$: *(E)*

La notation $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$ et $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ permet d'écrire :

(E) : $y^2(t)dy = x(t)dx$: alors, sur tout intervalle contenant t, tel que les fonctions y et x soient définies, on a par intégration :

$\frac{1}{3}y^3(t) = \frac{1}{2}x^2(t) + C$; les solutions sont données sous forme de courbes.

Exemple 4 *Loi de refroidissement de Newton*
Soit T_1 *la température initiale d'un corps et* T_0 *la température constante du milieu environnant avec* $T_0 < T_1$*. On cherche la loi qui régit le refroidissement du corps. L'expérience montre que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à* $T - T_0$*, on obtient ainsi :*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

En déduire l'expression de T *en fonction de* t, T_0, T_1*. Quelle est la limite de* T *quand* t *tend vers* $+\infty$ *?*

En écrivant :$\dfrac{dT}{T - T_0} = -kdt$, on a séparé fonction T et variable t :
$\ln(T - T_0) = -kt + c$,d'où
$T - T_0 = K\exp(-kt)$
Comme pour $t = 0, T = T_1$,on en déduit :

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\exp(-kt)$$

Donc la limite de T quand t tend vers $+\infty$ est T_0 : température du milieu environnant

1.4 Autres exemples

Résoudre l' équation différentielle :

$$y\prime + 3y = 3\sin x + \cos x$$

L'équation homogène a pour solutions :

$$z(x) = Kexp(-3x)$$

K réel quelconque, conformément au cours.

Une solution particulière évidente est $\mathrm{y}_0(x) = \sin x$

Les solutions de l'équation sont

$y(x) = z(x) + y_0(x) = \sin x + Kexp(-3x)$,K réel quelconque.

Exemple 5 *Résoudre l' équation différentielle :*

$$x\prime + 2x = t^2$$

L'équation homogène a pour solutions :

$z(t) = Kexp(-2t)$, K réel quelconque,

Une solution particulière est $\mathrm{x}_0(t) = at^2 + bt + c$:

On obtient par identification :

$\mathrm{x}_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$

Et donc :

Les solutions de l'équation sont :

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Kexp(-2t)$$