

# 1 Exercices équations différentielles

Les équations du type :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

se résolvent sur tout intervalle  $I$  de  $x$  où les fonctions  $a, b, c$  sont définies et où  $a$  ne s'annule pas.

Les solutions de l'équation homogène associée :  $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$  sont :

$$y_1(x) = K \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right)$$

Une solution particulière  $y_0$  pourra être obtenue, si nécessaire, par méthode de Lagrange :

Les solutions sur un tel intervalle  $I$  sont alors :

$$y(x) = K \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right) + y_0(x)$$

## 1.1 Equations linéaires d'ordre 1

**Exercice 1** Résoudre les équations différentielles en précisant les intervalles de résolution

1.  $y' = 2y + x^2$
2.  $3y' - y = x$
3.  $u' + u = 2e^x$

En situation concrète avec des notations proches de celles utilisées en chimie, biologie... :

**Exercice 2** Dans une réaction chimique, une quantité de produit notée  $[R]$  évolue en fonction du temps : on note  $v(t)$  la vitesse qui vaut  $v(t) = -\frac{d[R]}{dt}$ ; par ailleurs, on sait que vitesse et quantité  $[R]$  sont liées par une équation du type :  $v(t) = k[R]^\alpha$ , où  $k$  est une constante et  $\alpha$  un entier : écrire l'équation différentielle vérifiée par  $[R]$  et en déduire l'évolution de  $[R]$  en fonction de  $t$ .

**Exercice 3** La quantité  $u$  d'un élément radioactif est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{du}{dt} = -au.$$

La demi-vie d'un élément est le temps qu'il faut attendre pour qu'une quantité de cet élément diminue de moitié : par exemple, la demi-vie de l'uranium 238 est de  $4.5 \cdot 10^4$  ans;

Calculer la constante  $a$  en fonction de la demi-vie.

Combien de temps faut-il attendre pour qu'une quantité d'uranium 238 diminue de un pour cent ?

**Exercice 4** Dans son ouvrage "Le Pouce du Panda", le paléontologue Stéphen Jay Gould affirme : (voir complément ci dessous) « Sur la courbe de mesures de poids pour divers mammifères, on peut observer que l'augmentation du poids du cerveau représente environ  $2/3$  de celle du poids du corps » :

- a) Montrer que cette affirmation conduit à l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}^*$  :

$$(E_3) : xy' - \frac{2}{3}y = 0$$

- b) Résoudre l'équation différentielle  $(E_3)$

**Complément et proposition de lecture :**

**Comment traduire en équations un problème posé par un savant et exposé dans un ouvrage "grand public" ?**

**Stéphen Jay Gould, Le Pouce du panda le livre de poche, biblio essais.**

Résumé :

Il s'agit d'étudier un passage du livre de Stéphen Jay Gould dans lequel celui-ci nous éclaire sur des similitudes entre mammifères dans différents caractères quantitatifs :

A partir d'un grand nombre de mesures, il examine la liaison entre, par exemple, le poids du corps et le poids du cerveau, dégageant ainsi des constantes .

Observation courbes Poids du corps/ poids du cerveau chez les mammifères :

(25 millions de mesures, sur mammifères allant de la souris à l'éléphant ou musaraigne à la baleine...)

Stéphen Jay Gould affirme :

1) Sur la courbe souris-éléphant on peut observer que l'augmentation du poids du cerveau est environ 2/3 de celle du poids du corps :

2) Rythme cardiaque, rythme respiratoire, horloge biologique

Sur un grand nombre de mesures, on peut observer que l'augmentation de la fréquence cardiaque représente 0.28 celle du poids du corps, et l'augmentation du rythme respiratoire représente 0.28 celle du poids du corps :

Notons PC=poids du corps

Comment traduire ces phrases en équations mathématiques, sachant que plus loin dans l'ouvrage, on trouve (p.350)

$$(a) \text{rythme respiratoire} = 0.000047(\text{PC})^{0.28}$$

$$(b) \text{fréquence cardiaque} = 0.0000119(\text{PC})^{0.28}$$

En déduire que :

Le rythme respiratoire est proportionnel à la fréquence cardiaque.

"Pour tous les mammifères, le rapport rythme respiratoire/ fréquence cardiaque est constant et vaut environ 4 "

Donc pour une respiration, il y a 4 battements de cœur.

3) Durée de vie et fréquence cardiaque.

Plus les animaux sont petits, plus leur cœur bat vite et plus leur durée de vie est brève...

Tous les mammifères ont au cours de leur vie entière (environ) 200 millions de respirations, 800 millions de battements cardiaques ; les petits animaux vivent moins longtemps mais leur battements cardiaques sont plus rapides !

L'auteur précise que le cas de l'homme est singulier puisque sa durée de vie est longue par rapport à son poids... Chance !