Exercices probabilité

Martine Quinio

26 novembre 2012

1 Exercices lois classiques

Exercice 1 On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.

Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?

2) Quelle est la probabilité pour une personne d'être sain si son test est positif ?

3) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?

4) Quelle est la probabilité pour une personne d'être sain si son test est négatif ?

Exercice 2 Si, dans une population, une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ?
On mettra en évidence une variable aléatoire X dont on cherchera la loi et une loi approchée
.

Exercice 3 *Un magasin vend des ordinateurs dont la durée de vie en années est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ;*

1) Sachant que $P[X>5]=0.15$, donner à 10^{-3} près une valeur approchée de λ;

2) Calculer la probabilité pour que un quelconque de ces ordinateurs ait une durée de vie inférieure ou égale à 1an.

3) L'ordinateur coûte 600 euros ; le vendeur me propose une extension de garantie jusqu'à 3 ans, pour la somme de 180 euros :

remplacement gratuit de l'appareil par un appareil identique (ou équivalent) en cas de panne dans les 3 ans suivant la vente.

J'accepte de payer 180 euros :

a) Quelle est la probabilité de ne pas utiliser cette garantie et donc d'avoir assurer pour rien

b) Quelle est la probabilité pour moi d'être gagnant ?

4) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 1 an, quelle est la probabilité que sa durée de vie soit d'au moins 3 ans ?

Exercice 4 *Le nombre X d'appels d'une société de taxis pendant une durée T suit une loi de Poisson de paramètre λT*

On note Y le temps d'attente du premier appel

1) a) Pour un entier k, calculer P[X=k]

b) Quelle est l'espérance, la variance de X en fonction de λ et T ?

2) Que peut-on dire des événements : [X=0] et [Y>T] ?

3) En déduire la loi de probabilité de Y

2 Exercices loi normale

Exercice 5 *Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre : On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale de paramètres :*

moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm ; on rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm.

Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 6 *Sur un grand nombre de personnes, on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :*

- 56% *ont un taux inférieur à* 165 *cg ;*
- 34% *ont un taux compris entre* 165*cg et* 180 *cg ;*
- *Les autres ont un taux supérieur à* 180 *cg. 1) Calculer la moyenne m et l'écart type ;*

2) Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 *personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de* 182 *cg ?*

Exercice 7 *Sur une ligne de bus, on estime que le retard en minutes sur l'horaire est une variable aléatoire R qui suit une loi normale N(m ; σ)*

On admet que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est p=84,1% et que le retard moyen est 5 minutes :

1) Calculer σ

2) Quelle est la probabilité pour que le retard dépasse 9 minutes ?

3) Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité d'attendre encore moins de 4 minutes ?

4) Un étudiant prend ce bus tous les matins pendant 100 jours ; on suppose les retards journaliers indépendants

Soit X la variable aléatoire « nombre de matins parmi 100 où il attend moins de 7 minutes »

Quelle est la loi de probabilité de X , son espérance, sa variance

5) Lassé des retards de bus, il décide de prendre le bus ou le tram selon le protocole :

Le premier jour, il prend le bus

Si le jour n il a attendu plus de 7 minutes, le jour suivant il prend le tram ; sinon, il prend le bus le jour suivant

Si le jour n il prend le tram, le jour suivant il prend bus ou tram de façon équiprobable.

On note P(n) la probabilité de l'événement « L'étudiant prend le bus le jour n »

a) Montrer que :

$$P(n+1) = (p - \frac{1}{2})P(n) + \frac{1}{2}$$

b) Etudier la suite $(P(n))$

Exercice 8 *Sur un trajet en train (heure donnée, jour donné) Paris -Marseille, le retard moyen est de 10mn ; on considére que le retard est une variable aléatoire R d'espérance (en mn) 10 et d'écart-type : 3.*

A) On considère que la loi de R est une loi normale :

Calculez P[5<R<15].

B) La loi de R est inconnue ; on étudie plusieurs trajets, on note Ri la variable aléatoire "retard" sur le trajet numéro i.

On suppose les variables aléatoires Ri indépendantes, de même loi, de paramètres donnés dans A) :

Soit X la variable aléatoire "retard moyen sur n trajets", n≥ 100 :

1) Quelle est la loi de X ?

C) Dans le cas où le retard est inférieur à 5 mn, on considère le train à l'heure.

1) Sur 100 trajets de trains Paris -Marseille, soit N la variable aléatoire : "nombre de trajets dont le retard est inférieur ou égal à 5 mn" :

a) Quelle est la loi de N ?

b) calculer : P[N>4].

2) Dans cette question, le trajet considéré est Marseille Rennes : on suppose que la probabilité que le retard soit inférieur à 5 mn est 0.6 :

soit N' la variable aléatoire : "nombre de trajets parmi 100 dont le retard est inférieur ou égal à 5 mn" :

Quelle est la loi de N' ?

Exercice 9 *Dans cet exercice, on considère des courses cyclistes avec plus ou moins de participants et d'étapes...*

Les parties A, B, C sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 200 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 200, participe à une course cycliste qui comprend 20 étapes ; aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 10 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 10 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 10 coureurs ?

2) À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 200 participants.

Montrer que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est p=0,05.

3) On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 20 étapes de la course.

a). Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b). On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : il a été contrôlé 2 fois exactement

B : il n'a pas été contrôlé ;

C : il a été contrôlé au moins une fois.

c) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de X ?

Reprendre alors les questions 3a et 3b et comparer les résultats.

Partie B

Cette fois la course cycliste comprend 40 étapes et comporte 40 coureurs ;

A la fin de chaque étape, un groupe de 10 coureurs est choisi au hasard pour subir le contrôle antidopage.

À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 40 participants.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape ?

2) On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 40 étapes de la course.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ? Préciser ses paramètres.

b) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de Y ?