Aix-Marseille Université 2012-2013

Analyse 1

DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU 1

Exercice 1 Sur 8 points

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application.

1. (a) (1 point) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

   (b) (1 point) Donner la définition de f continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On considère maintenant

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. , \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

2. (a) (2 points) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $\eta \in]0, x_0[$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}.$$

   (b) (1 point) Montrer, en revenant à la définition, que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. (a) (2 points) Montrer que g n'a pas de limite en $+\infty$.

   (b) (1 point) Montrer que $f.g$ a une limite en $+\infty$.

Exercice 2 Sur 4 points

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$. Déterminer, si elle existe :

1. (2 points) La limite à droite en 1 de f.
2. (1 point) La limite en $+\infty$ de f.
3. (1 point) La limite en $+\infty$ de $(x \mapsto xf(x))$.

Exercice 3 Sur 9 points

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application croissante. On suppose que f est majorée sur $[a, +\infty[$, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in [a, +\infty[\Rightarrow f(x) \leq M.$$

   On veut montrer que f a une limite finie en $+\infty$.
   On note

$$A := \{f(x) \,;\, x \in [a, +\infty[\},$$

   l'ensemble image de $[a, +\infty[$ par f.

   (a) (1 point) Montrer que A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

   (b) (1 point) Montrer que A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

   (c) (2 points) En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup A.$$

Tournez SVP

(d) (1 point)

i. Donner l'exemple d'une application f bornée sur $\mathbb{R}$ et qui n'admet pas de limite en $+\infty$.

ii. Donner l'exemple d'une application f croissante sur $\mathbb{R}$ et qui n'a pas de limite finie en $+\infty$.

2. Application : On désigne par $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x. Soit f, l'application définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq E(x)} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{E(x)}}.$$

(a) (1 point) Calculer $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{5}{2})$.

(b) (1 point) Montrer que f est croissante.

(c) (1 point) Montrer la propriété suivante :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{2^k} \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(d) (1 point) En utilisant le résultat démontré dans la question 1, en déduire que f a une limite finie en $+\infty$.