

Analyse**DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU 2****Exercice 1**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application polynôme :

$$f_n(x) = x^n + ax + b, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. On suppose n pair. Montrer que f_n ne peut avoir plus de deux racines réelles.
2. On suppose n impair. Montrer que f_n ne peut avoir plus de 3 racines réelles.

Exercice 2

1. On rappelle que $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est la bijection réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle $[0, \pi]$. Justifier que $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que l'application $f : x \in] -1, 1[\rightarrow (\arcsin(x))^2$ est dérivable sur $] -1, 1[$.
3. Montrer que

$$(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 2, \quad \forall x \in] -1, 1[.$$

4. En déduire que $f \in \mathcal{C}^\infty(] -1, 1[)$.
5. Ecrire une relation entre $f^{(n+2)}$, $f^{(n+1)}$ et $f^{(n)}$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que f a une limite en $+\infty$ et que f' a une limite m en $+\infty$. Montrer que $m = 0$.

Exercice 4

1. Soit I un intervalle ouvert, soit $a \in I$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a . Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse ? Justifiez soigneusement en donnant une démonstration ou un contre-exemple.
Affirmation (1) : Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a .
Affirmation (2) : Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
2. On considère l'application polynomiale :

$$P(x) = x^{27} - 15x^3 + x^2 - 9$$

- (a) Calculer $P(-1)$ et $P(0)$.
- (b) Montrer que P admet au moins trois racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < x_3$.
- (c) Montrer qu'il existe $a \in]x_1, x_2[$ tel que P admette un extremum local en a .

Exercice 5

Démontrer que pour tous réels x et y appartenant à l'intervalle $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{1}{2}|x - y| \leq |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sqrt{\sin(x)} + x$.

1. Montrer que f est bien définie et que c'est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle I à déterminer.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur l'intérieur de $I \setminus \{0\}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I tout entier.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit décroissante.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.
3. Application : montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que si f admet de plus une limite finie en $+\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.
5. Trouver une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en $+\infty$ mais telle que g' ne tende pas vers 0 en $+\infty$.