Aix-Marseille Université 2012-2013

Analyse I

DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU 3

L'épreuve dure 2h.

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet est recto-verso. La barême est sur 28 points, la note tronquée à 20.

Exercice 1 [Question de Cours] *(sur 4 points)*

1. *(2 pt)* Énoncer soigneusement le théorème de Taylor Young.
2. *(2 pt)* Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 2 *(sur 7 points)* 1. Donner

(a) *(1 pt)* le DL3 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$;

(b) *(1 pt)* le DL3 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$;

(c) *(1 pt)* le DL3 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)\ln(1+x)$;

(d) *(1 pt)* le DL3 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$.

2. *(3 pt)* Déterminer une fonction polynomiale du 2ème degré $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\dfrac{\arctan(x) - p(x)}{(x-1)^3}$ possède en 1 une limite finie que l'on précisera.

Indication : On pourra utiliser le DL3 de $\arctan$ *en 1.*

Exercice 3 *(sur 6 points)* Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Considérons l'application $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) := \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(b)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(x) - f(b)\big) .$$

1. *(1 pt)* Justifier la continuité de h sur $[a,b]$ et sa dérivabiloté sur $]a,b[$. Calculer $h'(x)$ en fonction de $f(a)$, $g(a)$, $f'(x)$ et $g'(x)$, puis préciser la valeur de $h(a)$ et de $h(b)$.
2. *(1 pt)* En appliquant le théorème de Rolle à la fonction h montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c) .$$
Quel théorème fait en cours obtient-on dans le cas particulier où $g(x) = x$ pour tout $x \in [a,b]$?
3. *(2 pt)* Démontrer la règle suivante, dite "de l'Hôpital" :

   Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que

   (a) $f(a) = g(a) = 0$;

   (b) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$;

   (c) $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ a une limite à droite de a.

   Montrer que $\frac{f(x)}{g(x)}$ a une limite à droite de a et que
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Indication : On pourra montrer d'abord que pour tout $x \in]a,b]$ *il existe* $c_x \in]a,x[$ *tel que* $(f(x) - f(a))g'(c_x) = (g(x) - g(a))f'(c_x)$*, puis que* $\lim_{x\to a} c_x = a$*.*
4. *(2 pt)* Calculer la limite en 0 de
$$\frac{\cos x - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)}$$
par deux méthodes : en utilisant les développements limités et en appliquant la règle de l'Hôpital.

Exercice 4 *(sur 6 points)* Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n}{9} - E(\frac{n}{9})$, où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ désigne l'application "partie entière" définie par $E(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} | \; n \leq x\}$.

1. *(1 pt)* Calculer les 12 premiers termes de la suite.
2. *(2 pt)* En utlisant la division euclidienne préciser l'ensemble des valeurs de (u_n) et montrer que cette suite est bornée.
3. *(1 pt)* Est-ce que cette suite est monotone (croissante ou décroissante) ? Justifier votre réponse.
4. *(2 pt)* Préciser les valeurs d'adhérence de cette suite.

Exercice 5 *(sur 5 points)* Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1}\big(\frac{1}{x} - E(\frac{1}{x})\big) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \,. \end{cases}$$

1. *(1 pt)* Montrer que f est continue en 0.
2. *(1 pt)* Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors f est dérivable en 0 et spécifier $f'(0)$ dans ce cas.
3. *(1 pt)* Montrer, en utilisant la définition, que f admet un DLn en 0 et préciser les coefficients ce DLn.
4. *(2 pt)* Montrer que f n'est continue sur aucun voisinage de 0.
   Indication : On pourra montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point de discontinuité de f dans l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$.