Aix-Marseille Université 2012-2013

Analyse I

2NDE SESSION

L'épreuve dure 2h.

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 [Question de Cours]

1. Énoncer soigneusement le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Donner la définition de la dérivabilité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.
3. Donner la définition d'une valeur d'adhérence pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

1. On considère $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 - x)$.
   (a) Montrer que f est de classe C^∞ et calculer sa dérivé cinquième.
   (b) Calculer $f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Donner explicitement le développement de Taylor–Lagrange de f en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une formule concise pour $\ln(1 - x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et tout $c \in]0, x[$, on a $\frac{x}{1-c} \leq 1$.
3. Déduire des questions précédentes la limite en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.

Exercice 3

1. Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $c \in]a, b[$ un réel tel que $f(a) = f(c) = f(b)$.
   (a) Montrer que f' s'annule au moins deux fois sur $]a, b[$.
   (b) En déduire que f'' s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n s'annulant au moins $n + 1$ fois. Montrer que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
3. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale dont le coefficient constant vaut $\alpha > 1$ et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = e^x - P(x)$.
   (a) i. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.
   ii. Calculer $h(0)$.
   iii. Calculer, si elle existe, la limite de h en $+\infty$.
   iv. En déduire que l'équation $e^x = P(x)$ admet au moins une solution.
   v. On suppose de plus que le coefficient dominant de P est strictement négatif. Montrer que l'équation $e^x = P(x)$ possède au moins deux solutions distinctes.
   (b) i. Montrer que h est de classe C^∞.
   ii. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $h^{(n)}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   iii. Déduire de tout ce qui précède que l'équation $e^x = P(x)$ ne possède qu'un nombre fini de solutions distinctes.

TSVP →

Exercice 4

1. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et, le cas échéant, la dérivé de la fonction arcsinus.
2. Donner le développement limité en 0 et à l'ordre 2 de la fonction $\left(y \mapsto \sqrt{1-y}\right)$.
3. Donner le développement limité en 0 et à l'ordre 2 de la fonction $\left(z \mapsto \frac{1}{1+z}\right)$.
4. Donner le développement limité en 0 et à l'ordre 2 de la fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$.
5. Donner le développement limité en 0 et à l'ordre 5 de la fonction arcsinus.
6. Calculer, si elle existe, la limite quand x tend vers 0, de l'expression $\frac{\arcsin(x)+\sin(x)-2x}{(1-\cos(x))\ln(1+x^3)}$.