

Analyse I

PLANCHE 1 : LIMITES, CONTINUITÉ

Parties majorées, minorées - borne supérieure, borne inférieure

Exercice 1 •

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.
3. $(\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$.

Rappel : Pour les exercices suivants, on rappelle que si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\sup(A)$, qui est le plus petit des majorants de A . De même, si A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A .

Exercice 2

Soit A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a, a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide et minorée $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 3 •

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 4

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 5 •

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a .
2. On suppose que A n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers l'infini.

Exercice 6 •

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (c'est-à-dire majorée et minorée).
2. Montrer que toute suite croissante et majorée est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 [Moyennes harmonique et arithmétique]

1. Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, on a :

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

2. Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ tels que $0 < u_0 < v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies (c'est-à-dire que $u_n + v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).
- (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- (c) Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- (d) Donner la limite commune aux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Limites de fonctions

Exercice 8 •

Soient $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

- 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers l quand n tend vers $+\infty$.
- 2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- 3. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a .
- 4. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

.

Exercice 9 [Limite, limite à droite et limite à gauche] •

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- 1. Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.
- 2. Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante :
Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A ,

$$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l,$$

où " $x_n \uparrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$ " signifie " $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ".

- 3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $l = +\infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 10 [Opérations sur les limites] •

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On pose $I =]a, b[$. Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ et $m = \lim_{x \rightarrow a, x > a} g(x)$.

- 1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a, x > a} (f + g)(x) = l + m$.
- 2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que pour tout $x \in]a, c[$, $g(x) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

- On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que pour tout $x \in I$, $g(x) > 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
- On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 11 •

- $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ pour $x \in]-1, 1[$. Quelle est la limite à droite de f en 1 ?
- $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ pour $x \in [3, +\infty[$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
- $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Quelle la limite de f en $+\infty$?
- $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite à gauche de f en 1 ?
- $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite à droite de f en 0 ?
- $f(x) = \frac{\ln(2x^2-x+2)}{\sqrt{x^3+1}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Quelle est la limite en $+\infty$?
- $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ pour $x \in]-\pi, \pi[$. Quelle sont les limites (respectivement à droite et à gauche) en $-\pi$ et π ?
- $f(x) = \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$ pour $x \in [-2, 2] \setminus \{0\}$. Quelle est la limite en 0 ?
- $f(x) = 2x \ln(x + \sqrt{x})$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle est la limite (à droite) en 0 ?
- $f(x) = (x^2-1) \ln(7x^3+4x^2+3)$ pour $x \in]-1, +\infty[$. Quelle est la limite (à droite) en -1 ?
- Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
- $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

Exercice 12 [Limite en $+\infty$] •

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 13 [Fonction périodique admettant une limite]

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l , en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 14 [Point fixe d'une application croissante]

Soit $I = [0, 1]$ et soit f une application croissante de I dans I . On pose $A = \{x \in I, f(x) \leq x\}$. Montrer que :

- $A \neq \emptyset$,
- $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$.
- A possède une borne inférieure $a \in I$.
- $f(a) = a$.

(Toute application croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet donc un point fixe.)

Exercice 15 •

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un point de I . On suppose que f admet une limite $a > 0$ en x_0 . Démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x)| \geq \frac{a}{2}$.

Exercice 16 •

On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

Exercice 17 •

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, l'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Continuité en un point, prolongement par continuité

Exercice 18 •

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer α tel que, $|x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) + 3| \leq \varepsilon$. Que peut-on en conclure sur f ?

Exercice 19 •

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit $a > 0$. Montrer que pour tous réels $x, y \in [a, +\infty[$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{a^2}$. En déduire que f est continue sur $]a, +\infty[$. Que peut-on dire de la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 20

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Trouver $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(a)| < \epsilon$. Que peut-on en déduire sur la fonction sinus?

Exercice 21 •

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
2. $g(x) = x \frac{1}{\sin(x)}$ si x n'est pas un multiple de π et $g(x) = 0$ si x l'est;
3. $j(x) = xE(x)$;
4. $k(x) = E(x) \sin(\pi x)$.

Exercice 22 [Fonction continue, non nulle en un point] •

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a .

Exercice 23 [Prolongement par continuité]

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 et en 1?

Exercice 24 [Prolongement par continuité] •

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0?
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Continuité sur un intervalle - théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 25 •

Pour quelle valeur de α la fonction f , définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \alpha & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Exercice 26 [Fonction lipschitzienne]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout $\mathbb{R}$).

Exercice 27 •

Soit f une application continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f ne s'annule pas sur I . Montrer que f garde un signe constant sur I .

Exercice 28 [Polynôme de degré impair] •

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 29 •

Montrer que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 30 [Fonction dont l'image est discrète] •

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (c'est-à-dire continue en tout point de $\mathbb{R}$). On suppose que $f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 31 On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, (|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

1. Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$. En déduire que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I , alors f est continue sur I .
3. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1[$.

Exercice 32 •

soit f l'application de $[-1, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ pour tout $x \geq -1$. Montrer que f est bijective de $[-1, \infty[$ dans $]0, 1]$ et donner une formule explicite pour sa fonction réciproque.

Exercice 33 [Fonctions monotones]

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $A = \{f(x), x \in I\}$, $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$. (Si A est non minorée, on pose $\inf A = -\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \beta$.
2. Soit $c \in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c , notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c , notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \leq f(c) \leq f_d(c)$.
3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$.

Exercice 34 [Existence d'un maximum] •

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

Exercice 35 [Injectivité et continuité donne monotonie]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 36 •

Soit f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \exists x \in [0, 1], f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 37 [Valeur intermédiaire]

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, l'ensemble $\{s \in [0, 1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.
 Pour $t \in [0, 1]$, on pose $\varphi(t) = \inf\{s \in [0, 1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.
2. Soit $t \in [0, 1]$, montrer que $\varphi(t) \in [0, 1]$ et que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.
3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ est continue.
4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

Exercice 38 [Continuité de "max" et "min"]

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a . Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a .

Exercice 39 [Convexe implique continue]

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1 - t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1 - t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]
2. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma|x|$. En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 40 [Borne supérieure atteinte] •

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\{f(x), x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré et qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = \sup\{f(x), x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 41 [Exercice sur les valeurs intermédiaires]

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \leq 0$ et $g(x_1) \geq 0$.
3. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Exercice 42 [Point fixe]

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et vérifiant

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1], |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)|.$$

1. Montrer que f est injective.

2. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$.
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 43 [Equation fonctionnelle]

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{Pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+, f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que f est à valeurs positives ou nulles.
2. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit on suppose que f n'est pas identiquement nulle.

3. Calculer $f(0)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{x}{n})$ en fonction de $f(x)$ et n .
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et p, q deux entiers naturels strictement positifs. On pose $r = \frac{p}{q}$. En calculant $f(q(rx))$ de deux manières différentes, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et r .
6. Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.
 - (a) Construire une suite (x_n) de réels strictement positifs convergeant vers 0 et telle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs strictement positives.

7. On suppose dans cette question que f est continue à droite sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
8. On suppose que f est continue à droite en 0, montrer que f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$ et conclure qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
9. On suppose qu'il existe deux réels A, B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur $[A, B]$.
 - (a) Montrer que sur $[0, B - A]$, f est minorée de borne inférieure strictement positive.
 - (b) Montrer que f est continue à droite de 0.
 - (c) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 44 [Croissance et continuité]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit f une fonction croissante de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si l'image $f(]a, b[)$ est un intervalle.

Exercice 45 [Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)]

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_2 \in [0, 1]$ tel que $f(x_2) = (x_2)^2$. [On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x^2$.]
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.
3. On suppose maintenant que f est strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que h_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1}(x_n) > 0$. En déduire $x_{n+1} > x_n$.

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$. Quelle est la limite de $(x_n)^n$ quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 46 [Valeur intermédiaire]

Soit $\alpha > 0, \beta > 0$.

Soit f une fonction continue de $[0, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $f(0) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$.

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $g(0) < 0$ et $g(\beta) > 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0, \min(\alpha, \beta)[$ t.q. $f(x)(x - \beta) - g(x) = 0$. [On pourra distinguer les cas $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ et $\beta = \alpha$.]