

Analyse I

PLANCHE 3 : COMPLÉMENTS SUR LES SUITES

Propriétés sur les suites. Suites monotones.

Exercice 1 •

Montrer que si une suite (u_n) est convergente alors la suite $(|u_n|)$ est convergente. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 •

Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Exercice 3 •

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ en appliquant la définition de la convergence et en précisant N_ε qui intervient dans cette définition.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite de nombres réels qui vérifie :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 5

Calculer, suivant les valeurs de x , la limite des suites (u_n) , $u_n = (\cos(x))^n$, $x \in \mathbb{R}$, et (v_n) , $v_n = \cos(n!\pi x)$, $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Une telle suite possède la propriété P1 (resp. P2) s'il existe un indice h (resp. k) tel que $u_h = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (resp. $u_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$)

Montrer que si la suite (u_n) est convergente, elle possède au moins l'une des propriétés P1 ou P2. Donner un exemple de suite convergente qui possède les deux propriétés P1 et P2.

Exercice 7 [Le nombre e comme limite d'une suite] •

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dans $\mathbb{R}$ définie par $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Montrer que

1. $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}[(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n})]$.
2. la suite (x_n) est croissante,
3. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$
4. la suite (x_n) est bornée par 3.
5. la suite (x_n) est convergente. Soit l la limite de cette suite.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $l \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.
7. La suite (s_n) de terme général $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est convergente et $l = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.
8. $l = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}$ au sens des limites de fonctions.
9. $l = e$.

10. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n$.

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{\sin(1)}{n^2} + \frac{\sin(2)}{n^2} + \frac{\sin(3)}{n^2} + \dots + \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

En encadrant u_n , démontrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 10 [la constante d'Apéry] •

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Déterminer la monotonie de la suite (u_n)
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. Justifier que la suite (u_n) converge. Que peut-on dire de sa limite ?

Exercice 11 •

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
3. En calculant u_{10} et v_{10} donner un encadrement de la limite commune de ces deux suites.

Exercice 12

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. Montrer que (u_n) converge. *Indication : On pourra commencer par étudier la monotonie de la suite de terme général $v_n := \max(u_{n+1}, u_n)$.*

Exercice 13

Soit (u_n) une suite bornée telle que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1})$. Montrer que la suite (u_n) converge. *Indication : étudier d'abord la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$.*

Exercice 14 [Théorème de Cesaro]

1. Montrer que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers l , elle converge aussi en moyenne arithmétique vers l , c'est-à-dire que la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ converge aussi vers l . *Indication : Traiter d'abord le cas $l = 0$ puis s'y ramener en considérant la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - l$.*
2. La réciproque est-elle vraie ? Donner un exemple.
3. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ (où $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$), alors la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ a la même propriété.
4. Soit (u_n) une suite monotone. Montre que (u_n) converge vers l si et seulement si la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ converge vers l .

Exercice 15 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ qui converge vers l . Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} = l$. *Indication : Réduire le problème au théorème de Cesaro en utilisant la fonction $\ln$. Attention au cas $l = 0$. Est-ce que le résultat reste vrai si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$?*

Exercice 16 [Théorème de Stolz-Cesaro]

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels, avec (b_n) strictement croissante et non majorée. Si la limite

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

existe, alors la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe aussi et est égale à l .

Exercice 17 [Théorème des intervalles emboîtés]

Soit (I_n) une suite d'intervalles fermés $I_n = [a_n, b_n]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_{n+1} \subset I_n$.

1. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
2. Quelle condition doivent satisfaire les suites (a_n) , (b_n) pour que l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ ait un seul élément.
3. Est-ce que le théorème similaire est vrai dans $\mathbb{Q}$ (donc si on remplace les intervalles fermés de nombres réels par des intervalles fermés de nombres rationnels) ?

Limite sup, limite inf. Suites extraites. Valeurs d'adhérence

Exercice 18 [Calcul des valeurs d'adhérence d'une suite] •

1. Calculer les valeurs d'adhérence, la limite inf et la limite sup de la suite (u_n) définie par
 - (a) $u_n = 5 + \frac{\sqrt{n} \sin(n)}{2n^2} + (-1)^{n^2+1}$.
 - (b) $u_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$.
 - (c) $u_n = \cos(\frac{n\pi}{3})$. Comparer l'ensemble des termes (valeurs) de cette suite avec l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.
 - (d) $u_n = \frac{7n}{11} - E(\frac{7n}{11})$. Comparer l'ensemble des termes (valeurs) de cette suite avec l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.
2. Introduire la notion de valeur d'adhérence pour une suite dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite complexe (z_n) définie par
 - (a) $z_n = i^n + (\frac{1+i}{2})^n + (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{3n+1}$
 - (b) $z_n = (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^n + n(-1 + i^n) + \frac{1}{n^2}$.

Exercice 19

Soit (u_n) est une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée. Montrer que (u_n) est majorée (donc convergente).

Exercice 20 •

En utilisant des suites extraites, établir la divergence des suites suivantes : $u_n = n^{-1+(-1)^n}$, $v_n = \cos(\pi\sqrt{n})$, $w_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$

Exercice 21 •

Montrer qu'une suite de nombres réels (u_n) est non majorée si et seulement si (u_n) admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 22

Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 23 •

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = \frac{n+1}{n} \cos(\frac{n\pi}{2})$ et $v_n = \frac{n-1}{n} \sin(\frac{n\pi}{2})$. Calculer les limites supérieures et inférieures des suites (u_n) , (v_n) et $(u_n + v_n)$.

Exercice 24

Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ et

$$v_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p & \text{si } n = 2p \\ \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases}$$

Exercice 25 •

Montrer que pour toutes suites réelles bornées (u_n) et (v_n) on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} (v_n).$$

Est-ce que cette inégalité reste vraie pour les suites non-bornées ? Attention au cas $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \infty$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (v_n) = -\infty$.

Exercice 26

I. Soit (u_n) une suite convergente de $\mathbb{R}$ et soit l sa limite.

1. Montrer que si $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n < l\}$ est infini, alors (u_n) admet une suite extraite strictement croissante,
2. Montrer que si $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > l\}$ est infini, alors (u_n) admet une suite extraite strictement décroissante,
3. Qu'est-ce qu'on peut dire de la suite (u_n) si les deux ensembles $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n < l\}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > l\}$ sont finis ?

II. Montrer que toute suite dans $\mathbb{R}$ admet une suite extraite monotone.

III. Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Montrer que toute valeur d'adhérence de (u_n) est la limite d'une suite extraite monotone.

Exercice 27

Déterminer les limites inférieures et supérieures de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_1 = 0$, $u_{2n} = \frac{u_{2n-1}}{2}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2} + u_{2n}$.

Exercice 28 [L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée]

Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite convergente dont tous les termes sont des valeurs d'adhérence de (u_n) . Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ est aussi une valeur d'adhérence de (u_n) .

Exercice 29 Soient (u_n) , (v_n) deux suites dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Notons par A (respectivement B) l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) , respectivement (v_n) . En utilisant les suites (u_n) , (v_n) construire une suite (w_n) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence soit $A \cup B$.

Exercice 30 [Suites bornées denses dans un intervalle]

Soit $a \in]0, \infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $\varphi_a(x) := \min\{x - ka \mid k \in \mathbb{Z}, ka \leq x\} \in [0, a[$.

1. Remarquer que pour $\varphi_1(x) = x - E(x)$, puis $\varphi_a(x) = a(\frac{x}{a} - E(\frac{x}{a}))$.
2. Supposons que $a \in \mathbb{Q}$.
 - (a) Montrer que l'ensemble V des valeurs de l'application $\mathbb{N} \rightarrow [0, a[$ définie par $n \mapsto \varphi_a(n)$ est fini. Préciser le cardinal de cet ensemble.
 - (b) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\varphi_a(n))$ est l'ensemble fini V .
 - (c) Donner un exemple de suite bornée dans $\mathbb{R}$ qui a exactement 2013 valeurs d'adhérence.
3. Supposons que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - (a) Montrer que l'application $\mathbb{N} \rightarrow [0, a[$ définie par $n \mapsto \varphi_a(n)$ est injective.
 - (b) Montrer que la suite $(\varphi_a(n))$ admet une suite extraite convergente dans $[0, a]$.

- (c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 < |\varphi_a(m) - \varphi_a(n)| < \varepsilon$.
- (d) l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\varphi_a(n))$ est $[0, a]$.
4. Préciser l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sin(n)$.
5. Préciser l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (v_n) définie par $v_n = \tan(n)$.

Exercice 31 [Suite bornée telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$]

1. Soit (u_n) une suite bornée de $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) coïncide avec l'intervalle $[\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n]$.
2. Donner un exemple d'une suite bornée et divergente (u_n) de $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Suites de Cauchy.

Exercice 32

Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$ telle que la suite (v_n) de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$ est bornée. Montrer que (v_n) et (u_n) sont convergentes.

Exercice 33

Montrer en utilisant le critère de Cauchy que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ est divergente.

Exercice 34 •

On considère une suite de nombres réels (u_n) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$. Montrer à l'aide du critère de Cauchy que (u_n) est convergente lorsque $k \in [0, 1[$.

Exercice 35

1. démontrer par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

2. Montrer que la suite (u_n) donnée par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est une suite de Cauchy.

Exercice 36 •

Montrer, en utilisant la définition, que

1. la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ n'est pas de Cauchy.
2. la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ est de Cauchy.

Exercice 37

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ à valeurs rationnelles converge vers x . En déduire que tout nombre réel (en particulier tout nombre irrationnel) est la limite d'une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Qu'est-ce qu'on peut dire de la suite (u_n) lorsque

1. x est un nombre décimal (donc un nombre possédant un développement décimal limité) ?
2. $x \in \mathbb{Q}$?

Exercice 38

Montrer que la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2 + \frac{1}{k})^k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

est de Cauchy.

Suites récurrentes.

Exercice 39 •

Soit la suite (u_n) définie par récurrence par : $u_0 > 2$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

1. Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite l ?
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire la nature de la suite (u_n) (convergente ou pas).

Exercice 40 •

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \arctan x$.

1. Montrer que f a un seul point fixe x_0 et préciser ce point.
2. Est-ce que f est une contraction ?
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite récurrente (u_n) dans $\mathbb{R}$ définie par $u_0 = x$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x_0 .

Exercice 41 •

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue et croissante.

1. Montrer que la suite récurrente définie par $u_0 = b$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, est décroissante.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 42

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sin(x)$.

1. Faites le graphe de f ,
2. Montrer que $f([0, \pi]) = [0, \pi]$.
3. Préciser l'ensemble des points fixes de f .
4. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ on a $x \leq f(x) \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ et pour tout $x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ on a $x \geq f(x) \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite récurrente $(u_n(x))$ associée à f de terme initial $u_0(x) = x$ est convergente.
6. Étudier l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

Exercice 43

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout entier $n \geq 0$ les relations $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres u_n et v_n sont positifs et inférieurs au $\max(a, b)$.
2. Établir une relation simple entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$, et en déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n .
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont une limite commune l .
4. Étudier la suite $(u_n + 2v_n)$ et en déduire la valeur de l .

Exercice 44

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite l que l'on calculera en fonction de a et de b .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(a_n + b_n)}.$$

En déduire que pour tout $n \geq 0$ on a $0 \leq (b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{(b_n - a_n)^2}{4a}$ et $(b_n - a_n) \leq 4a \left(\frac{b-a}{4a}\right)^{2^n}$.

3. Application : trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.
4. Pour $a_0 = 3$, $b_0 = 5$ calculer les valeurs exactes de a_2 et b_2 et en déduire un encadrement de $\sqrt{15}$ par deux rationnels.

Exercice 45

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{n+2}e^{u_n}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n \leq 1$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+2)}$, puis la convergence de (u_n) .

Exercice 46

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}$. Démontrer par récurrence que (u_n) est positive et décroissante. Conclure...

Exercice 47 [Récurrences d'ordre 2]

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$ satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 - ar - b = 0$.

1. Montrer que
 - (a) la suite (u_n) est déterminée par les deux premiers termes u_0, u_1 ,
 - (b) Si l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 , alors le terme général de la suite (u_n) est donnée par $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, où λ, μ sont des constantes réelles.
 - (c) Si r_0 est une racine double de l'équation caractéristique, alors le terme général de la suite (u_n) est donnée par $u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n$, où λ, μ sont des constantes réelles.
 - (d) Si l'équation caractéristique a deux racines complexes $r_1 = \rho e^{i\theta}$, $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ alors le terme général de la suite (u_n) est donnée par $u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$, où λ, μ sont des constantes réelles.
2. Dans chaque cas déterminer les constantes λ, μ en fonction de u_0, u_1 . Indication : Si l'équation caractéristique a deux racines complexes et $\rho = 1$, utiliser l'exercice 30.
3. Dans chaque cas étudier la convergence de la suite (u_n) .
4. Application : Soit (u_n) une suite de Fibonacci, donc une suite qui satisfait la relation récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Donner la formule du terme général en fonction des termes initiaux u_0, u_1 . Pour quelles paires $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ la suite de Fibonacci associée est convergente ?

Exercice 48 •

On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?
2. On suppose de plus que $u_0 \leq 0,25$. Montrer que $u_n \in [0; 0,25]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que (u_n) est croissante. Conclure.

3. On suppose cette fois que $u_0 \in [0, 25; 0, 75]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Conclure.
4. On suppose cette fois que $u_0 > 0, 75$. Montrer que (u_n) est croissante. Conclure.

Exercice 49

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f . Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[1, 3]$?
2. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
3. En déduire que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
4. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 50 [suite arithmético-géométrique]

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la seule limite possible l de la suite (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - l$. Démontrer que (v_n) est géométrique. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 51

On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ et telle que $u_0 = 0$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède exactement deux solutions $a < b$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = a$. Montrer alors que u_n est toujours différent de a .
3. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$ est une suite géométrique.
4. En déduire u_n en fonction de v_n , puis de n . Conclure quant à la convergence de (u_n) .