Aix–Marseille Université	2012–2013

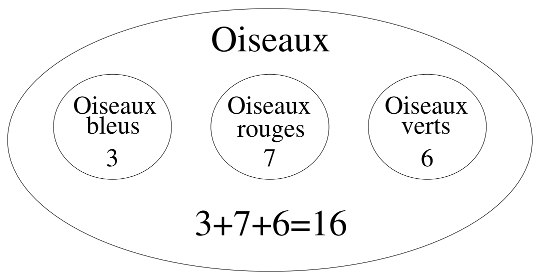
Géométrie & Polynômes

COURS : DÉNOMBREMENT

Le dénombrement, c'est l'art de compter les éléments d'un ensemble.

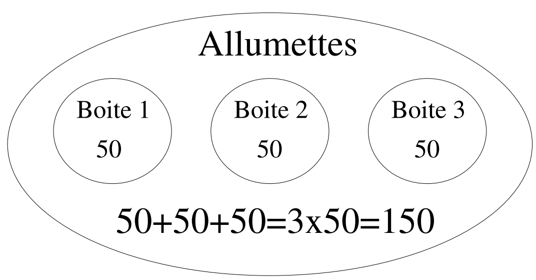
1 Préambule : pourquoi additionner, pourquoi multiplier

Quand un dénombrement parait compliqué, on peut essayer de subdiviser le travail en triant les éléments de l'ensemble en sous-ensembles disjoints.



Il suffit alors de dénombrer successivement chacun des ensembles, en espérant que cela est plus facile. cela revient à additionner les nombres d'éléments de chacun des sous-ensembles.

Il arrive (relativement souvent) que chaque sous-ensemble a le même nombre d'éléments. L'addition se transforme alors en multiplication par le nombre de paquets.



2 Quelques exemples fondamentaux

Voici quelques problèmes fondamentaux auxquels on pourra essayer de se ramener.

2.1 k–uplets

Problème 1. *On a un ensemble E de $n \in \mathbb{N}^*$ éléments, on veut dénombrer, pour un $k \in \mathbb{N}^*$ donné, les k–uplets de E, c'est-à-dire les objets de la forme $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ avec $a_i \in E$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.*

Remarques 1.
– L'ordre est important : $(1, 2) \neq (2, 1)$.
– Il peut y avoir répétition : si $1 \in E$, $(1, 1, 1)$ est un 3–uplet de E.

Proposition 2. *Pour tout ensemble E ayant $n \in \mathbb{N}^*$ éléments et tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe n^k k–uplets d'éléments de E.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
- C'est vrai pour $k = 1$ car il suffit alors de choisir un seul élément de E, et il y a n choix possibles.
- Supposons le résultat vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ et dénombrons les $(k+1)$–uplets. Ils sont tous de la forme $(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1})$. Trions-les selon la valeur du dernier élément a_{k+1}. Il y a alors n paquets, autant que de valeur possible pour le dernier élément. Dans un même paquet, ils ont tous la même dernière valeur, ils ne diffèrent donc que par le k–uplet des k premières valeurs. Par hypothèse de récurrence, cela fait donc n^k éléments différents dans ce paquet. On a donc n paquets avec chacun n^k éléments, cela fait donc en tout $n \times n^k = n^{k+1}$ $(k+1)$–uplets différents. La propriété est donc vrai au rang $k+1$.
- Par principe de raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

□

Remarque 3. La formule est encore vraie si $n = 0$, c'est-à-dire si E est l'ensemble vide.

2.2 Arrangements

Problème 2. *On a $n \in \mathbb{N}^*$ objets, on veut en classer $k \in [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire mettre un ordre 1^{er}, $2^{ème}$, $\cdots$, $k^{ème}$ sur k d'entre eux.*

Remarques 4.
- L'ordre est important : être premier ou deuxième, ça n'est pas la même chose.
- Il ne peut pas y avoir répétition : si on est premier, on ne peut pas être deuxième.

Notation 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n! := 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et par convention, $0! := 1$.

Proposition 6. *Il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ classements possibles de $k \in [\![1, n]\!]$ éléments parmi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que la propriété est vrai pour tout $n \geq k$.
- Pour $k = 1$, il suffit de choisir un élément qui sera l'unique classé. Il y a $n = \frac{n!}{(n-1)!}$ choix possibles.
- Supposons le résultat vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ et regardons les classements de $k+1$ éléments parmi $n \geq k+1$. On les trie en fonction de l'élément classé premier. Cela donne n paquets, un par valeur possible pour ce premier. Dans un même paquet, les éléments diffèrent par les éléments classés de 2 à $k+1$. Mais cela donne un classement de k éléments parmi les $n-1 (\geq k+1-1 = k)$ qui ne sont pas classés premier. Par hypothèse de récurrence, il y a donc $\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}$ éléments dans un même paquet. Cela fait en tout $n\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} = \frac{n!}{(n-(k+1))!}$ classements de $(k+1)$ éléments. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.
- Par principe de raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

□

Remarque 7. On aurait pu également montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la formule est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2.3 Combinaisons

Problème 3. *On a $n \in \mathbb{N}^*$ éléments, on veut en choisir $k \in [\![0, n]\!]$ parmi eux.*

Remarques 8.
- L'ordre n'importe pas : les éléments sélectionnés sont juste mis de coté de façon indifférenciée.
- Il ne peut pas y avoir répétition : un élément est sélectionné ou non, c'est tout.

Notation 9. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de choix de $k \in [\![0, n]\!]$ éléments parmi $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a* $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration. Revenons sur le problème 2. Pour dénombrer les solutions, nous avions trié selon la valeur du premier élément. Refaisons le compte mais en procédant autrement : on trie les classements en fonction des k éléments triées, c'est-à-dire deux classements sont dans le même paquet si ce sont les même éléments qui apparaissent dans le classement. Dans ce cas, il y a $\binom{n}{k}$ paquets correspondant à tous les choix possibles des k classés. dans un même paquet, les k éléments sont déjà déterminés, il ne reste donc plus qu'à dénombrer tous les classements possibles de ces k éléments. D'après la proposition 6, il y en a $\frac{k!}{(k-k)!} = k!$. Il y a donc $\binom{n}{k}$ paquets de $k!$ éléments, et de fait il y a $k!\binom{n}{k}$ classements possibles de k éléments parmi n. Mais la proposition 6 nous dit par ailleurs, qu'il y en a $\frac{n!}{(n-k)!}$. On en déduit que $k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ et donc que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!()n-k}!$. □

Notation 11. Par convention, on étend la notation $\binom{n}{k}$ à tous les couples $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$. Pour étendre au maximum les formules, on parle aussi parfois de $\binom{n}{-1} := 0$.

3 Sur les coefficients binômiaux

Les coefficients binômiaux $\binom{n}{k}$ possèdent de très nombreuses propriétés. L'une d'elle est particulièrement utile :

Proposition 12. *Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$,* $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Démonstration. Commençons par les cas particuliers :
– Si $k = 0$, cela donne $0 + 1 = 1$.
– Si $k = n + 1$, cela donne $1 + 0 = 1$.
– Si $k > n + 1$, cela donne $0 + 0 = 0$.
Considérons maintenant le cas principal où $k \in [\![1, n]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{k+n-k+1}{k(n-k+1)} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!\big((n+1)-k\big)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

3.1 Binôme de Newton

Les coefficients binômiaux permettent de généraliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Proposition 13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a, b \in \mathbb{C}$, on a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. On travaille par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- C'est vrai pour $k=0$ car $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{-k}$.
- Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \left(a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) + \left(b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}\right) \\
&= \left(a^{n+1}b^0 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}\right) + \left(a^0b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}\right) \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-(k-1)}\right) + b^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}\right) && \text{par changement d'indice} \\
&= b^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-(k-1)}\right) + a^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^0b^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n-(k-1)}\right) + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 && \text{d'après la proposition 12} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n=1$.
- D'après le principe de raisonnement par récirrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exemples 14.
- Pour $n=0$, cela donne $(a+b)^0 = 1$.
- Pour $n=1$, cela donne $(a+b)^1 = a+b$.
- Pour $n=2$, cela donne $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.
- Pour $n=3$, cela donne $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
- Pour $a=b=1$, cela donne $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.
- Pour $a=-1$ et $b=$, cela donne $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

3.2 Triangle de Pascal

La proposition 13 montre l'importance des coefficients binômiaux. On va voir dans ce qui suit un moyen de les calculer relativement vite.

Définition 15. On appelle triangle de Pascal le tableau infini à droite et vers le bas, dont le terme au croisement de la ligne i et de la colonne j est $\binom{i}{j}$.

$$\begin{matrix}
\binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \binom{0}{3} & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{1}{2} & \binom{1}{3} & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{2}{3} & \cdots \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
& & \vdots & &
\end{matrix}$$

Puisque $\binom{n}{k} = 0$ dès que $k > n$, tous les termes au-dessus de la diagonale sont nuls. On les écrit donc en général pas, ce qui fait bien du triangle de Pascal un triangle.

$$\begin{array}{ccccc}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}$$

La proposition 12 indique que tout coefficient est somme de celui qui est au-dessus dans le tableau avec celui qui est au-dessus à gauche. Pour le remplir, il suffit de commencer par remplacer $\binom{0}{0}$ par 1, puis d'additionner chaque 2 termes adjacents pour remplir la case sous le terme de droite (en n'oubliant que tout ce qui est hors du triangle vaut 0).

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
0+1=1 & 1+0=1 & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
0+1=1 & 1+1=2 & 1+0=1 & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}$$

$$\rightsquigarrow
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
0+1=1 & 1+2=3 & 2+1=3 & 1+0=1 & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}
\rightsquigarrow \cdots$$

On trouvera parfois le triangle écrit de façon légèrement décalée, afin que chaque terme soit la somme des deux termes placées au-dessus de lui.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
\iddots & & & & & & & & \vdots & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$