Aix–Marseille Université 2012–2013

Géométrie & Polynômes

Cours : Géométrie

1 Produit scalaire

Dans cette section, nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 1. Soit $\overrightarrow{u}_1 := (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{u}_2 := (x_2, y_2)$ (resp. $\overrightarrow{u}_1 := (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{u}_2 := (x_2, y_2, z_2)$) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ le nombre réel $\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 := x_1x_2 + y_1y_2$ (resp. $\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$).

Proposition 2. *Soit $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$ trois vecteurs et λ un nombre réel, alors*

i. $\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{u}_1$;

ii. $\overrightarrow{u}_1.(\overrightarrow{u}_2 + \lambda\overrightarrow{u}_3) = \overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 + \lambda\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_3$.

Démonstration. Donnons la preuve dans le cas de $\mathbb{R}^2$, la preuve dans $\mathbb{R}^3$ étant totalement similaire.

On note $\overrightarrow{u}_1 := (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{u}_2 := (x_2, y_2)$ et $\overrightarrow{u}_3 := (x_3, y_3)$.
On a alors, d'une part, $\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{u}_1$; et, d'autre part, $\overrightarrow{u}_1.(\overrightarrow{u}_2 + \lambda\overrightarrow{u}_3) = (x_1, y_1).(x_2 + \lambda x_3, y_2 + \lambda y_3) = x_1(x_2 + \lambda x_3) + y_1(y_2 + \lambda y_3) = x_1x_2 + y_1y_2 + \lambda(x_1x_3 + y_1y_3) = \overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 + \lambda\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_3$. □

Proposition 3. *Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.*
Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration. C'est essentiellement une conséquence du théorème de Pythagore. Montrons le résultat dans $\mathbb{R}^3$, la preuve dans $\mathbb{R}^2$ étant similaire mais plus simple.

On note $\overrightarrow{u} := (x, y, z)$, O l'origine de $\mathbb{R}^3$, $A := (x, y, z)$ le point tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $B := (x, y, 0)$ le projeté de A sur le plan horizontal et $C := (x, 0, 0)$ le projeté de B sur l'axe des abscisses.

Les triangles OBA et OCB sont respectivements rectangles en B et et en C.
D'après le théorème de Pythagore, on a donc

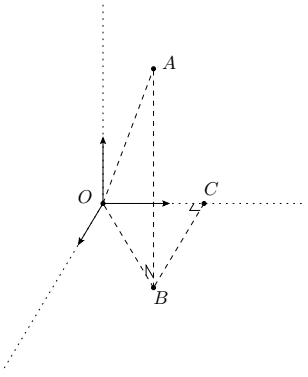
$$||\overrightarrow{u}||^2 = ||\overrightarrow{OA}||^2 = ||\overrightarrow{OB}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2$$

et

$$||\overrightarrow{OB}||^2 = ||\overrightarrow{OC}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2.$$

Or $||\overrightarrow{OC}||^2 = x^2$, $||\overrightarrow{BC}||^2 = y^2$ et $||\overrightarrow{AB}||^2 = z^2$. On en déduit

$$||\overrightarrow{u}||^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}.$$



On considère maintenant, deux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ orthogonaux et on pose A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$. Le triangle AOB est donc rectangle en O et on a $||\overrightarrow{AB}||^2 = ||\overrightarrow{OA}||^2 + ||\overrightarrow{OB}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2$. Or, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. Donc, d'après ce qui précéde, $||\overrightarrow{AB}||^2 = (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}).(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$. On en déduit que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$. □

Proposition 4. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et α l'angle entre eux. Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\alpha)$.*

Démonstration. On commence par poser $\overrightarrow{u}' = \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ et $\overrightarrow{v}' = \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$ de sorte à manier des vecteurs unitaires. Puisque l'on a changé que les longueurs des vecteurs, on a toujours un angle α entre $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$. On considère maintenant $\overrightarrow{w}'$ un vecteur unitaire, orthogonal à $\overrightarrow{u}'$, dans le plan $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de sorte que $\overrightarrow{v}' = \cos(\alpha)\overrightarrow{u}' + \sin(\alpha)\overrightarrow{w}'$. On a alors $\overrightarrow{u}'.\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{u}'.(\cos(\alpha)\overrightarrow{u}' + \sin(\alpha)\overrightarrow{w}') = \cos(\alpha)||\overrightarrow{u}'|| + \sin(\alpha)\overrightarrow{u}.'\overrightarrow{w}' = \cos(\alpha)$. On en déduit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (||\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}').(||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}') = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.(\overrightarrow{u}'.\overrightarrow{v}') = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\alpha)$. □

Corollaire 5. *Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul si et ssi les deux vecteurs sont orthogonaux.*

Définition 6. On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ (resp. trois vecteurs $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) s'ils sont unitaires et deux à deux orthogonaux ; autrement dit si, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$ (resp. $i, j \in \{1, 2, 3\}$), $\overrightarrow{u}_i.\overrightarrow{u}_j = \delta_i^j$ avec $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Proposition 7. *Toute base orthonormée est une base ; c'est-à-dire que tout vecteur s'écrit comme combinaison linéaire des éléments d'une base orthonormée.*
De plus, si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) (resp. (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2)) sont les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ dans une base orthonormée, alors $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$ (resp. $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$). Autrement dit, le produit scalaire ne dépend pas du choix d'une base orthonormée.

Démonstration. Donnons la preuve dans le cas d'une base orthonormée $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, la preuve dans $\mathbb{R}^3$ étant totalement similaire.

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Avec $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$, nous avons donc trois vecteurs dans un espace de dimension 2, il existe donc nécessairement une relation non triviale entre ces trois vecteurs. C'est-à-dire, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que $\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{u}_1 + \gamma\overrightarrow{u}_2 = 0$. Supposons par l'absurde que $\alpha = 0$. On a alors $\beta\overrightarrow{u}_1 + \gamma\overrightarrow{u}_2 = 0$ et donc $0 = (\beta\overrightarrow{u}_1 + \gamma\overrightarrow{u}_2).u_1 = \beta\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_1 + \gamma\overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{u}_1 = \beta||\overrightarrow{u}_1||^2 = \beta$ et $0 = (\beta\overrightarrow{u}_1 + \gamma\overrightarrow{u}_2).u_2 = \beta\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 + \gamma\overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{u}_2 = \gamma||\overrightarrow{u}_2||^2 = \gamma$. Mais alors $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ ce qui contredit la non trivialité du triplet (α, β, γ).
On a donc $\alpha \neq 0$ et donc $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{u}_1 + y\overrightarrow{u}_2$ avec $x := -\frac{\beta}{\alpha}$ et $y := -\frac{\gamma}{\alpha}$.

Avec les notations de l'énoncé, on a maintenant

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 &= (x_1\overrightarrow{u}_1 + y_1\overrightarrow{u}_2).(x_2\overrightarrow{u}_1 + y_2\overrightarrow{u}_2) \\ &= x_1x_2\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_1 + x_1y_2\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 + y_1x_2\overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{u}_1 + y_1y_2\overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{u}_2 \\ &= x_1x_2 + y_1y_2. \end{aligned}$$

□

2 Produit vectoriel

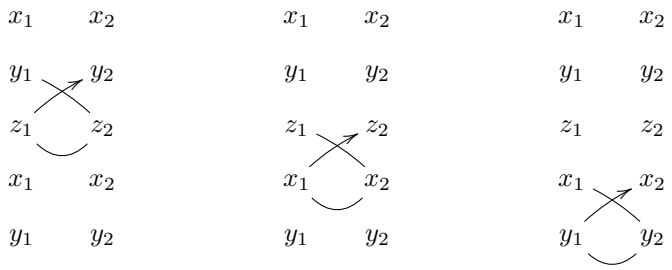
Le contenu de cette section est spécifique à $\mathbb{R}^3$. Il n'existe pas de produit vectoriel de deux vecteurs dans les autres dimensions.

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 8. Soit $\overrightarrow{u}_1 := (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{u}_2 := (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$, noté $\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2$, le vecteur $\big((y_1z_2 - z_1y_2), (z_1x_2 - x_1z_2), (x_1y_2 - y_1x_2)\big)$.

Remarque 9. Pour se souvenir de l'ordre des termes, on peut écrire verticalement et de façon cyclique les coefficients de $\overrightarrow{u}_1$ à gauche et ceux de u_2 à droite. Le $i^{\text{ème}}$ coefficient de $\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2$ s'obtient alors en suivant

un γ en partant de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne :



Proposition 10. *Soit $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$ trois vecteurs et λ un nombre réel, alors*

i. $\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2 = -\overrightarrow{u}_2 \wedge \overrightarrow{u}_1$;

ii. $\overrightarrow{u}_1 \wedge (\overrightarrow{u}_2 + \lambda\overrightarrow{u}_3) = \overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2 + \lambda\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_3$.

Démonstration. On note $\overrightarrow{u}_1 := (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{u}_2 := (x_2, y_2, z_2)$ et $\overrightarrow{u}_3 := (x_3, y_3, z_3)$.
On a alors, d'une part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2 &= \big((y_1z_2 - z_1y_2), (z_1x_2 - x_1z_2), (x_1y_2 - y_1x_2)\big)\\ &= -\big((y_2z_1 - z_2y_1), (z_2x_1 - x_2z_1), (x_2y_1 - y_2x_1)\big)\\ &= -\overrightarrow{u}_2 \wedge \overrightarrow{u}_1\ ;\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}_1 \wedge (\overrightarrow{u}_2 + \lambda\overrightarrow{u}_3) &= (x_1, y_1) \wedge (x_2 + \lambda x_3, y_2 + \lambda y_3)\\ &= \Big(\big(y_1(z_2 + \lambda z_3) - z_1(y_2 + \lambda y_3)\big), \big(z_1(x_2 + \lambda x_3) - x_1(z_2 + \lambda z_3)\big), \big(x_1(y_2 + \lambda y_3) - y_1(x_2 + \lambda x_3)\big)\Big)\\ &= \big((y_1z_2 - z_1y_2), (z_1x_2 - x_1z_2), (x_1y_2 - y_1x_2)\big) + \lambda\big((y_1z_3 - z_1y_3), (z_1x_3 - x_1z_3), (x_1y_3 - y_1x_3)\big)\\ &= \overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2 + \lambda\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_3.\end{aligned}$$

□

Proposition 11. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est soit nul, soit orthogonal simultanément à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Démonstration. On note (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a alors

$$\begin{aligned}u.(u \wedge \overrightarrow{v}) &= (x, y, z).\big((yz' - zy'), (zx' - xz'), (xy' - yx')\big)\\ &= x(yz' - zy') + y(zx' - xz') + z(xy' - yx')\big)\\ &= (xyz' - xyz') + (xzy' - xzy') + (yzx' - yzx')\\ &= 0.\end{aligned}$$

On montre de même que $\overrightarrow{v}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0$. □

2.2 Identité de Lagrange et corollaires

Proposition 12 (Identité de Lagrange)**.** *Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a*

$$||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||^2 + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 = ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2.$$

Démonstration. On note (x,y,z) et (x',y',z') les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a alors

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}||^2 &= (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\\
&= \big((yz'-zy'),(zx'-xz'),(xy'-yx')\big).\big((yz'-zy'),(zx'-xz'),(xy'-yx')\big)\\
&= (yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2+(xy'-yx')^2\\
&= \Big(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}\\ \alpha\neq\beta}}\alpha^2\beta'^2\Big)-\Big(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}\\ \alpha\neq\beta}}\alpha\beta\alpha'\beta'\Big)\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 &= (xx'+yy'+zz')^2\\
&= \Big(\sum_{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}}\alpha\beta\alpha'\beta'\Big)\ ;\\
&= \Big(\sum_{\alpha\in\{x,y,z\}}\alpha^2\alpha'^2\Big)+\Big(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}\\ \alpha\neq\beta}}\alpha\beta\alpha'\beta'\Big)\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2 &= (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)\\
&= \sum_{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}}\alpha^2\beta'^2\\
&= \Big(\sum_{\alpha\in\{x,y,z\}}\alpha^2\alpha'^2\Big)+\Big(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}\\ \alpha\neq\beta}}\alpha^2\beta'^2\Big).
\end{aligned}$$

En sommant ces trois égalité, on obtient l'identité de Lagrange. □

Proposition 13. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et α l'angle entre eux. Alors*

$$||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.|\sin(\alpha)|.$$

Démonstration. D'après l'égalité de Lagrange, on $||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2-(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2$. Or d'après la Prop. 4, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\alpha)$. On a donc $||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2\big(1-\cos^2(\alpha)\big) = ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2\sin^2(\alpha)$. On en déduit $||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.|\sin(\alpha)|$. □

Corollaire 14. *Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est nul si et ssi les deux vecteurs sont colinéaires.*

Corollaire 15. *Deux vecteurs (x_1,y_1) et (x_2,y_2) du plan sont colinéaires si et ssi $x_1y_2-y_1x_2=0$.*

Démonstration. On plonge $\mathbb{R}^2$ comme le plan horizontal de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine. Les vecteurs deviennt $(x_1,y_1,0)$ et $(x_2,y_2,0)$. Leur produit scalaire donne $(0,0,x_1y_2-y_1x_2)$. Le corollaire précédent permet de conclure. □

Remarque 16. On appelle cette valeur déterminant des deux vecteurs. Elle peut être vue comme une règle de trois sur les coordonnées des vecteurs.

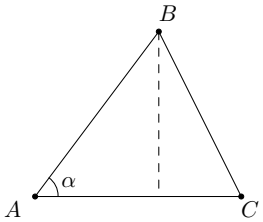
Proposition 17. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$. Soit donc $\overrightarrow{w}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Avec $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, cela fait quatre vecteurs dans un espace de dimension 3. Il existe donc une combinaison non trivial $\alpha\overrightarrow{w}+\beta\overrightarrow{u}+\gamma\overrightarrow{v}+\delta\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=0$ avec $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\neq(0,0,0,0)$. Supposons par l'absurde que $\alpha=0$. Alors $\beta\overrightarrow{u}+\gamma\overrightarrow{v}+\delta\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=0$ et on a

$0 = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).(\beta\overrightarrow{u} + \gamma\overrightarrow{v} + \delta\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \delta(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \delta||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||^2$ et donc $\delta = 0$ car, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant non colinéaires, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq 0$. Mais alors $\beta\overrightarrow{u} + \gamma\overrightarrow{v} = 0$, ce qui n'est possible que pour $\beta = \gamma = 0$ puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires. Mais alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et la combinaison entre $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est trivial, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc $\alpha \neq 0$ et on a bien $\overrightarrow{w} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{u} - \frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{v} - \frac{\delta}{\alpha}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. □

Proposition 18. *Soit A, B et C trois points de $\mathbb{R}^3$. Alors* $\text{Aire}(ABC) = \frac{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||}{2}$.

Démonstration.
L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la longueur d'un coté avec la hauteur issue du sommet opposé. Or si on note α l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, la hauteur issue de B, sommet opposé au coté $[AC]$ vaut $||\overrightarrow{AB}||.|\sin(\alpha)|$. L'aire du triangle vaut donc $\frac{||\overrightarrow{AC}||.||\overrightarrow{AB}||.|\sin(\alpha)|}{2} = \frac{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||}{2}$. □



3 Droites et plans (et cercles aussi un peu)

3.1 Définitions et équations paramétriques

Définition 19. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) et Λ un ensemble. On appelle équations paramétriques de X par Λ toute fonction $f\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (resp. $f\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^3$) telle que, pour tout $M \in \mathbb{R}^2$ (resp. $M \in \mathbb{R}^3$)

$$M \in X \iff \exists \lambda \in \Lambda, M = f(\lambda).$$

3.1.1 Droites

On se donne A et $\overrightarrow{u}$ un point et un vecteur de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition 20. On appelle droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ l'ensemble $\mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}} := \{M | \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ colinéaires$\}$.

Proposition 21. *La droite $\mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$ est paramétrée par $\mathbb{R}$ via*

$$\mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}} = \{A + \lambda\overrightarrow{u} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

avec

$$A + \lambda\overrightarrow{u} = \begin{cases} (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) & \text{si } A = (x_0, y_0) \text{ et } \overrightarrow{u} = (a, b) \text{ sont dans } \mathbb{R}^2 \\ (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c) & \text{si } A = (x_0, y_0, z_0) \text{ et } \overrightarrow{u} = (a, b, c) \text{ sont dans } \mathbb{R}^3 \end{cases}.$$

Démonstration. Donnons la preuve dans le cas de $\mathbb{R}^2$, la preuve dans $\mathbb{R}^3$ étant totalement similaire.

Par définition, on a

$$\begin{aligned} M = (x, y) \in \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ colinéaires} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x - x_0, y - y_0) = \lambda(a, b) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b). \end{aligned}$$

□

3.1.2 Plans

On se donne $A := (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{u}_1 := (a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{u}_2 := (a_2, b_2, c_3)$ un point et deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$.

Définition 22. On appelle plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ l'ensemble

$$\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2} := \{M | \overrightarrow{AM} \text{ est combinaison linéaire de } \overrightarrow{u}_1 \text{ et } \overrightarrow{u}_2\}.$$

Proposition 23. *Le plan $\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$ est paramétré par $\mathbb{R}^2$ via*

$$\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2} = \{A + \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

avec

$$A + \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 = (x_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, y_0 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, z_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2).$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned} M = (x, y, z) \in \mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2} &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda_1 (a_1, b_1, c_1) + \lambda_2 (a_2, b_2, c_2) \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, (x, y, z) = (x_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, y_0 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, z_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2). \end{aligned}$$

□

3.2 Vecteurs normaux et équations cartésiennes

Définition 24. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). On appelle équation cartésienne de X toute fonction $g \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $g \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$) telle que, pour tout $M \in \mathbb{R}^2$ (resp. $M \in \mathbb{R}^3$)

$$M \in X \iff g(M) = 0.$$

3.2.1 Droites

On se donne $A := (x_0, y_0)$ et $\overrightarrow{u}$ un point et un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Ce qui suit n'est pas valable pour une droite dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 25. *Il existe un unique, à multiplication par un scalaire près, vecteur $\overrightarrow{n}$ satisfaisant*

$$M \in \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}} \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$$

Démonstration. Montrons d'abord qu'un tel vecteur existe. Pour cela, on pose $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Si a et b sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, on pourra, par exemple, prendre $\overrightarrow{n} = (-b, a)$. On remarque que, $\overrightarrow{n}$ n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Vérifions que $\overrightarrow{n}$ satisfait l'équivalence. Si M est un point de $\mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$ et donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \lambda \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$. Réciproquement, supposons que M soit tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$. Puisque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$ forment une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{n}$. Or $0 = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = (\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{n}).\overrightarrow{n} = \lambda \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} + \mu \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n} = \mu ||\overrightarrow{n}||^2$. Cela implique que $\mu = 0$ et donc que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$; autrement dit que $M \in \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$.

Montrons maintenant que si $\overrightarrow{n}'$ est un vecteur satisfaisant l'équivalence ci-dessus, alors $\overrightarrow{n}'$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Puisque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$ forment toujours une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{n}' = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{n}$. Mais alors, en prenant B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, on a $B \in \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$ et donc $0 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}' = \overrightarrow{u}.(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{n}) = \lambda ||\overrightarrow{u}||^2$. On en déduit que $\lambda = 0$ et donc que $\overrightarrow{n}' = \mu \overrightarrow{n}$. □

Définition 26. On a appelle vecteur normal à $\mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$ tout vecteur $\overrightarrow{n}$ satisfaisant l'équivalence de la proposition précédente.

Proposition 27. *Si (a,b) est un vecteur normal à $\mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que*

$$M = (x,y) \in \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}} \iff ax + by + c = 0.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} M = (x,y) \in \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}} &\iff \overrightarrow{AM} \perp (a,b) \\ &\iff (x - x_0, y - y_0).(a,b) = 0 \\ &\iff (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \\ &\iff ax + by - ax_0 - by_0 = 0. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $c = -ax_0 - by_0$. □

Proposition 28. *Si $ax + by + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, est une équation cartésienne pour la droite $\mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$, alors (a,b) est un vecteur normal pour $\mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$.*

Démonstration. Puisque $A \in \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}}$, on a $ax_0 + by_0 + c = 0$ et donc $c = -ax_0 - by_0$. Pour tout point $M = (x,y)$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_{A,\overrightarrow{u}} &\iff ax + by + c = 0 \\ &\iff ax + by - ax_0 - by_0 = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\iff (a,b) \perp \overrightarrow{AM}. \end{aligned}$$

□

3.2.2 Plans

On se donne $A := (x_0, y_0, z_0)$ et $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2$ un point et deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 29. *Il existe un unique, à multiplication par un scalaire près, vecteur $\overrightarrow{n}$ satisfaisant*

$$M \in \mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2} \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$$

Démonstration. Montrons d'abord qu'un tel vecteur existe. Pour cela, on pose $\overrightarrow{n} := \overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2 \neq 0$. On remarque que, $\overrightarrow{u}_1$ n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{u}_2$, les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ et $\overrightarrow{n}$ forment, en vertu de la proposition 17, une base de $\mathbb{R}^3$. Vérifions que $\overrightarrow{n}$ satisfait l'équivalence. Si M est un point de $\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2$ et donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{n} + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{n} = 0$. Réciproquement, supposons que M soit tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$. Puisque $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{n})$ forment une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \mu \overrightarrow{n}$. Or $0 = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = (\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \mu \overrightarrow{n}).\overrightarrow{n} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{n} + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{n} + \mu \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n} = \mu ||\overrightarrow{n}||^2$. Cela implique que $\mu = 0$ et donc que $\overrightarrow{AM} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2$; autrement dit que $M \in \mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$.

Montrons maintenant que si $\overrightarrow{n}'$ est un vecteur satisfaisant l'équivalence ci-dessus, alors $\overrightarrow{n}'$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Puisque $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{n})$ forment toujours une base de $\mathbb{R}^3$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{n}' = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \mu \overrightarrow{n}$. Mais alors, en prenant B_1 et B_2 tels que $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{u}_2$, on a $B_1, B_2 \in \mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$ et donc $0 = \overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{n}' = \overrightarrow{u}_1.(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \mu \overrightarrow{n}) = \overrightarrow{u}_1.(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2)$ et de même $\overrightarrow{u}_2.(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2) = 0$. Le vecteur $\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2$ est donc simultanément orthogonal à $\overrightarrow{u}_1$ et à u_2, tout en étant dans le plan engendré par $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$. On a donc $\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 = 0$ et donc $\overrightarrow{n}' = \mu \overrightarrow{n}$. □

Définition 30. On a appelle vecteur normal à $\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$ tout vecteur $\overrightarrow{n}$ satisfaisant l'équivalence de la proposition précédente.

Proposition 31. *Si (a,b,c) est un vecteur normal à $\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$, alors il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que*

$$M = (x,y,z) \in \mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2} \iff ax + by + cz + d = 0.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} M = (x,y,z) \in \mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2} &\iff \overrightarrow{AM} \perp (a,b,c) \\ &\iff (x-x_0, y-y_0, z-z_0).(a,b,c) = 0 \\ &\iff (x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = 0 \\ &\iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $c = -ax_0 - by_0 - cz_0$. □

Proposition 32. *Si $ax + by + cz + d = 0$, avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, est une équation cartésienne pour le plan $\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$, alors (a,b,c) est un vecteur normal pour $\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$.*

Démonstration. Puisque $A \in \mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2}$, on a $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ et donc $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Pour tout point $M = (x,y,z)$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P}_{A,\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2} &\iff ax + by + cz + d = 0 \\ &\iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \\ &\iff a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \\ &\iff (a,b,c) \perp \overrightarrow{AM}. \end{aligned}$$

□

3.3 Cercles

Soit $A := (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 33. On appelle cercle de centre A et de rayon r l'ensemble $\mathcal{C}_{A,r} := \{M \in \mathbb{R}^2 | M \text{ est à distance } r \text{ de } A\}$.

Proposition 34. *L'équation $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - r^2 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{C}_{A,r}$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} M = (x,y) &\iff M \text{ est à distance } r \text{ de } A \\ &\iff ||\overrightarrow{AM}||^2 = r^2 \\ &\iff ||(x-x_0, y-y_0)||^2 - r^2 = 0 \\ &\iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 35. *Le cercle $\mathcal{C}_{A,r}$ est paramétré par $\mathbb{R}$ via*

$$\mathcal{C}_{A,r} = \Big\{ \big(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\sin(\theta)\big) \Big| \theta \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Démonstration. Considérons $M \in \mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont de la forme $\big(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\sin(\theta)\big)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors un calcul direct montre que $||\overrightarrow{AM}||^2 = r^2$.
Réciproquement, considérons $M = (x, y) \in \mathcal{C}_{A,r}$. On a alors $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$ et donc $\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1$.

Mais alors $\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 = 1 - \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 \leq 1$ et donc $\left|\frac{x-x_0}{r}\right| \leq 1$. Il existe donc $\widetilde{\theta} \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x-x_0}{r} = \cos(\widetilde{\theta})$. On a alors $\left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 = 1 - \cos^2(\widetilde{\theta}) = \sin^2(\widetilde{\theta})$ et de fait $\frac{y-y_0}{r} = \varepsilon\sin(\widetilde{\theta})$ avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. On pose alors $\theta := \varepsilon\widetilde{\theta}$. On a alors $\frac{x-x_0}{r} = \cos(\theta)$ et $\frac{y-y_0}{r} = \sin(\theta)$. On en déduit que $(x, y) = \big(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\sin(\theta)\big)$. □

Remarque 36. On peut remplacer l'espace de paramètres $\mathbb{R}$ par n'importe quel intervalle de largeur 2π.

4 Barycentres

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

Théorème 37. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. A Il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.*
On a alors, pour tout point M, $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{GM} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}$

Démonstration. On pose G le point tel que $\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i}$. On a alors, pour tout point M,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GM} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GM} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_i} + \overrightarrow{A_iM}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}\right) \\
&= -\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{A_1G} + \left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}\right) \\
&= -\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i} + \left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}\right).
\end{aligned}$$

En particulier, en prenant $M = G$, on obtient $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

Montrons l'unicité du point M. Pour cela, on suppose que le point G' vérifie la même propriété. On a alors $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iG'} = \overrightarrow{0}$, et donc $G = G'$. □

Définition 38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. On appelle l'unique point G vérifiant $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ le barycentre des points $A_1, \cdots, A_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. On le note $\mathrm{Bar}\big((A_1, \alpha_1); \cdots; (A_n, \alpha_n)\big)$. Si tous les coeffcients sont égaux, on parle alors d'isobarycentre.

Remarque 39. L'ordre des points A_i et des coefficients α_i n'importe pas. Seul importe la correspondance entre points et coefficients, ainsi que la somme des coefficients, qui doit être non nulle.

Proposition 40. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a*

$$\mathrm{Bar}\big((A_1,\alpha_1);\cdots;(A_n,\alpha_n)\big) = \mathrm{Bar}\big((A_1,\lambda\alpha_1);\cdots;(A_n,\lambda\alpha_n)\big).$$

Remarque 41. La notion de barycentre est invariante par multiplication de tous les coefficients par un même scalaire. On dit que c'est une notion homogène en les coefficients. En particulier, quitte à diviser tous les coeffcients par $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, on peut supposer que la somme des coefficients est égale à 1.

Démonstration. Cela provient de

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0},$$

et de l'unicité du barycentre. □

Proposition 42. *Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n+p} \alpha_i \neq 0$ et $\sum_{i=n+1}^{n+p} \alpha_i \neq 0$. On a*

$$\mathrm{Bar}\left((A_1,\alpha_1);\cdots;(A_n,\alpha_n);\left(\mathrm{Bar}\big((A_{n+1},\alpha_{n+1});\cdots;(A_{n+p},\alpha_{n+p})\big),\sum_{i=n+1}^{n+p}\alpha_i\right)\right) = \mathrm{Bar}\big((A_1,\alpha_1);\cdots;(A_{n+p},\alpha_{n+p})\big).$$

Démonstration. On note $G' = \mathrm{Bar}\big((A_{n+1},\alpha_{n+1});\cdots;(A_{n+p},\alpha_{n+p})\big)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} &\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \alpha_i (\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A_i})\right) \\
&\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \alpha_i\right)\overrightarrow{GG'} + \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \overrightarrow{G'A_i}\right) \\
&\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \alpha_i\right)\overrightarrow{GG'}
\end{aligned}$$

et l'unicité du barycentre permet encore de conclure. □

Proposition 43. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. En notant, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, (x_i,y_i) (resp. (x_i,y_i,z_i)) les coordonnées de A_i dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), on a*

$$\mathrm{Bar}\big((A_1,\alpha_1);\cdots;(A_n,\alpha_n)\big) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right)$$

$$\left(\textit{resp. } \mathrm{Bar}\big((A_1,\alpha_1);\cdots;(A_n,\alpha_n)\big) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right)\right)$$

Démonstration. En notant $G := \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right)$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$, un calcul direct montre que l'on a bien $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. □

5 Transformations du plan et nombres complexes

Chaque point du plan correspond à un nombre complexe. Toute transformation du plan peut donc être vue comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Le but de cette partie est de traduire sous forme complexe toutes les transformation usuelles du plan.

5.1 Transformations fixant l'origine

Proposition 44. *L'homothétie h_k centrée en l'origine et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ correspond à l'application $(z \mapsto kz)$.*
La rotation r_θ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour de l'origine correspond à $(z \mapsto e^{i\theta}z)$.
La symétrie s_0 par rapport à l'axe réel correspond à $(z \mapsto \overline{z})$.

Démonstration. Par définition, l'application h_k envoie le vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur le vecteur $k\overrightarrow{OA}$. Au nombre complexe z, elle associe donc le nombre complexe kz.

L'application r_θ envoie, quant à elle, le point A sur le seul point B tel que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ soient de même longueur et forment un angle θ. Cela signifie que $|z_A| = |z_B|$ et que $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \mathrm{Arg}(z_B) - Arg(z_A) = \theta$. On a donc $\frac{z_B}{z_A} = e^{i\theta}$ et donc $z_B = e^{i\theta}z_A$.

L'assertion sur la symétrie axiale a déjà été vue. □

Corollaire 45. *La symétrie centrale s_O autour de l'origine s'écrit $z \mapsto -z$.*
La symétrie axiale s_θ par rapport à la droite passant par l'origine et formant un angle $\theta \in \mathbb{R}$ avec l'axe réel s'écrit $(z \mapsto e^{2i\theta}\overline{z})$.

Démonstration. Que ce soit en interprétant s_O comme une rotation d'angle π ou une homothétie de rapport -1, on obtient le résultat.

Avec les notations ci-dessus, la symétrie s_θ peut se décomposer [1] en $s_\theta = r_\theta \circ s_0 \circ r_{-\theta}$. D'après ce qui précède, cela donne

$$z \quad \mapsto \quad e^{-i\theta}z \quad \mapsto \quad \overline{e^{-i\theta}z} = e^{i\theta}\overline{z} \quad \mapsto \quad e^{i\theta}e^{i\theta}\overline{z} = e^{2i\theta}\overline{z}.$$

□

Corollaire 46. *Toute application de la forme $(z \mapsto az)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ correspond à la composition d'une homothétie et d'une rotation, toutes deux centrée en l'origine.*

Démonstration. On écrit $a = re^{i\theta}$ sous forme polaire. La multiplication par a peut alors être décomposée en d'abord une multiplication par r, *i.e.* une homothétie de rapport r, puis une multiplication par $e^{i\theta}$, *i.e.* une rotation d'angle θ. □

5.2 Transformation ne fixant pas nécessairement l'origine

Proposition 47. *Si w représente le vecteur $\overrightarrow{v}$, alors la translation $t_{\overrightarrow{v}}$ de vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit $(z \mapsto z + w)$.*

Démonstration. Si la translation $t_{\overrightarrow{v}}$ envoie A sur B ; c'est que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ et donc que $z_B - z_A = w$. □

1. cela correspond à tourner le plan de sorte à rendre horizontale la droite par rapport à laquelle on veut faire la symétrie, faire la symétrie et enfin remettre le plan à sa place en faisant la rotation inverse

Corollaire 48. *Soit A le point d'affixe z_A.*
L'homothétie $h_{A,k}$ de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ s'écrit $(z \mapsto kz + (1-k)z_A)$.
La rotation $r_{A,\theta}$ de centre A et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ s'écrit $(z \mapsto e^{i\theta}z + (1-e^{i\theta})z_A)$.

Démonstration. Dans les deux cas, on peut procéder de deux manières.

1**ère méthode :** dans l'esprit de la preuve du corollaire 45, on peut écrire la transformation comme la composée de
i. la translation $t_{\overrightarrow{AO}}$ qui ramène A en l'origine ;
ii. une tranformation qui cette fois fixe l'origine ;
iii. la translation $t_{\overrightarrow{OA}}$qui renvoie l'origine en A.
Dans le cas de l'homothétie, cela donne par exemple :

$$z \quad \mapsto \quad z - z_A \quad \mapsto \quad k(z - z_A) \quad \mapsto \quad k(z - z_A) + z_A = kz + (1-k)z_A.$$

2**nde méthode :** on peut reprendre la démonstration de la proposition 44 en remplaçant l'origine par A. Dans le cas de la rotation, cela donne par exemple :
L'application $r_{A,\theta}$ envoie le point M sur le seul point M' tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ soient de même longueur et forment un angle θ. Cela signifie que $|z_M - z_A| = |z_{M'} - z_B|$ et que $\text{Arg}\left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_M-z_A}\right) = \theta$. On a donc $\frac{z_{M'}-z_A}{z_M-z_A} = e^{i\theta}$ et donc $z_{M'} = e^{i\theta}(z_M - z_A) + z_A$.

□

Corollaire 49. *Toute application de la forme $(z \mapsto az+b)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ correspond à la composition d'une homothétie, d'une rotation et d'une translation.*