Aix–Marseille Université 2012–2013

Géométrie & Polynômes

Cours : A propos du signe somme

Dans tout ce qui suit, on se donne une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'élements réels ou complexes.

Remarque 1. Si l'on ne possède qu'une suite finie d'éléments, on pourra toujours la compléter en une suite infinie en associant la valeur nulle à tous les indices non considérés originellement.

Notation 1. Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \le q$. On définit la notation $\sum_{k=p}^{q} a_k$ (ou $\sum_{k\in[\![p,q]\!]} a_k$) récursivement sur $q \in [\![p, \infty[\![$ par

$$\sum_{k=p}^{p} a_k := a_p \quad \text{puis} \quad \sum_{k=p}^{q+1} = \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + a_{q+1}.$$

Remarque 2. Cette définition formalise rigoureusement le fait qu'il s'agisse de la somme des éléments de la suite :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k := a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{q-1} + a_q.$$

Remarque 3. La lettre k est ici totalement muette et on pourrait la remplacer par n'importe quelle autre notation. Par exemple, on a $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{l=p}^{q} a_l$. Notamment, le résultat ne dépend pas de k.

Remarque 4. On peut également sommer des suites infinies, mais cela nécessite beaucoup plus de précautions.

Toutes les propositions qui suivent permettent de manipuler les sommes et de calculer avec. Elles peuvent sembler "évidentes" en utilisant la notation informelle "$a_p + \cdots + a_q$" de la somme, mais souvent le diable se cache derrière un raccourci de "bon sens". Par souci de rigueur et pour mémoire, nous donnons donc des preuves formelles utilisant la définition récursive de la somme.

Proposition 2 (concaténation de sommes)**.** *Soit $p, q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $p \le q \le r$. Alors*

$$\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=q+1}^{r} a_k\Big) = \sum_{k=p}^{r} a_k.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $r \in [\![q+1, \infty[\![$.
i. La propriété est vraie pour $r = q + 1$ par définition de la somme :

$$\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=q+1}^{q+1} a_k\Big) = \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + a_{q+1} = \sum_{k=p}^{q+1} a_k.$$

ii. On suppose le résultat vrai au rang r. On a alors

$$\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=q+1}^{r+1} a_k\Big) = \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=q+1}^{r} a_k\Big) + a_{r+1} = \Big(\sum_{k=p}^{r} a_k\Big) + a_{r+1} = \sum_{k=p}^{r+1} a_k.$$

La propriété est alors donc vraie au rang $r + 1$.

□

Corollaire 3. *Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p < q$. Alors* $\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + \sum_{k=p+1}^{q} a_k = \Big(\sum_{k=p}^{q-1} a_k\Big) + a_q.$

Proposition 4 (changement d'indice)**.** *Soit* $p, q \in Z$ *tels que* $p \leq q$ *et soit* $n \in \mathbb{Z}$*. Alors*

$$\sum_{k=p}^{q} a_{k+n} = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $q \in [\![p, \infty[\![$.
i. La propriété est vraie pour $q = p$:

$$\sum_{k=p}^{p} a_{k+n} = a_{p+n} = \sum_{k=p+n}^{p+n} a_k.$$

ii. On suppose le résultat vrai pour q. On a alors

$$\sum_{k=p}^{q+1} a_{k+n} = \Big(\sum_{k=p}^{q} a_{k+n}\Big) + a_{q+1+n} = \Big(\sum_{k=p+n}^{q+n} a_k\Big) + a_{q+1+n} = \sum_{k=p+n}^{q+1+n} a_k.$$

La propriété est alors donc vraie au rang $q + 1$.

□

Proposition 5 (multiplication par un scalaire)**.** *Soit* $p, q \in Z$ *tels que* $p \leq q$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Alors*

$$\lambda \sum_{k=p}^{q} a_n = \sum_{k=p}^{q} \lambda a_k.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $q \in [\![p, \infty[\![$.
i. La propriété est tautologiquement vraie pour $q = p$.
ii. On suppose le résultat vrai pour q. On a alors

$$\lambda \sum_{k=p}^{q+1} a_k = \lambda\Bigg(\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + a_{q+1}\Bigg) = \Big(\lambda \sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + \lambda a_{q+1} = \Big(\sum_{k=p}^{q} \lambda a_k\Big) + \lambda a_{q+1} = \sum_{k=p}^{q+1} \lambda a_k.$$

La propriété est alors donc vraie au rang $q + 1$.

□

Pour la proposition suivante, on se donne une seconde suite $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ d'élements réels ou complexes.

Proposition 6 (somme de sommes)**.** *Soit* $p, q \in \mathbb{Z}$ *tels que* $p \leq q$*. Alors*

$$\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=p}^{q} b_k\Big) = \sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k).$$

Remarque 5. Il est important que chacune des deux sommes portent sur les <u>même indices</u>.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $q \in [\![p, \infty[\![$.
i. La propriété est vraie pour $q = p$:

$$\Big(\sum_{k=p}^{p} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=p}^{p} b_k\Big) = a_p + b_p = \sum_{k=p}^{p} (a_k + b_k).$$

ii. On suppose le résultat vrai pour q. On a alors

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=p}^{q+1} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=p}^{q+1} b_k\Big) &= \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + a_{q+1} + \Big(\sum_{k=p}^{q} b_k\Big) + b_{q+1} &= \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=p}^{q} b_k\Big) + a_{q+1} + b_{q+1} \\ & &= \Big(\sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k)\Big) + (a_{q+1} + b_{q+1}) \\ & &= \sum_{k=p}^{q+1} (a_k + b_k).\end{aligned}$$

La propriété est alors donc vraie au rang $q+1$.

□

Proposition 7 (produit de sommes)**.** *Soit $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leq q$ et $p' \leq q'$. Alors*

$$\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big)\Big(\sum_{k=p'}^{q'} b_k\Big) = \sum_{k=p}^{q} \Big(\sum_{l=p'}^{q'} a_k b_l\Big).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $q \in [\![p, \infty[\![$.

i. La propriété est vraie pour $q = p$ car cela correspond à la multiplication de la deuxième somme par un scalaire.

ii. On suppose le résultat vrai pour q. On a alors

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=p}^{q+1} a_k\Big)\Big(\sum_{k=p'}^{q'} b_k\Big) &= \Big(\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big) + a_{q+1}\Big)\Big(\sum_{k=p'}^{q'} b_k\Big) &= \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k\Big)\Big(\sum_{k=p'}^{q'} b_k\Big) + a_{q+1}\Big(\sum_{k=p'}^{q'} b_k\Big) \\ & &= \sum_{k=p}^{q} \Big(\sum_{l=p'}^{q'} a_k b_l\Big) + \sum_{l=p'}^{q'} a_{q+1} b_l \\ & &= \sum_{k=p}^{q+1} \Big(\sum_{l=p'}^{q'} a_k b_l\Big).\end{aligned}$$

La propriété est alors donc vraie au rang $q+1$.

□

La proposition sur la somme de sommes se généralise à la somme d'un nombre fini de sommes. Pour cela, on considère une suite double $(a_k^l)_{k,l\in\mathbb{Z}}$ d'élements réels ou complexes.

Proposition 8 (inversion de sommes)**.** *Soit $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leq q$ et $r \leq s$. Alors*

$$\sum_{k=p}^{q} \Big(\sum_{l=r}^{s} a_k^l\Big) = \sum_{l=r}^{s} \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k^l\Big)$$

Remarque 6. Cette proposition justifie l'utilisation de la notation

$$\sum_{\substack{k\in[\![p,q]\!] \\ l\in[\![r,s]\!]}} a_k^l.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $s \in [\![r, \infty[\![$.

i. La propriété est vraie pour $s = r$:

$$\sum_{k=p}^{q} \Big(\sum_{l=r}^{r} a_k^l\Big) = \sum_{k=p}^{q} a_k^r = \sum_{l=r}^{r} \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k^l\Big).$$

$\Big($ i'. Le cas $s = r + 1$ correspond à la proposition 7 avec $a_k = a_k^r$ et $b_k = b_k^{r+1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.$\Big)$

ii. On suppose le résultat vrai pour s. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q}\Big(\sum_{l=r}^{s+1} a_k^l\Big) &= \sum_{k=p}^{q}\bigg(\Big(\sum_{l=r}^{s} a_k^l\Big) + a_k^{s+1}\bigg) && \text{par définition de la somme sur } l \\
&= \sum_{k=p}^{q}\Big(\sum_{l=r}^{s} a_k^l\Big) + \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k^{s+1}\Big) && \text{d'après la proposition 7} \\
&= \sum_{l=r}^{s}\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k^l\Big) + \Big(\sum_{k=p}^{q} a_k^{s+1}\Big) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{l=r}^{s+1}\Big(\sum_{k=p}^{q} a_k^l\Big) && \text{par définition de la somme sur } l.
\end{aligned}$$

La propriété est alors donc vraie au rang $s + 1$.

□

Voici maintenant quelque exemples :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.