

**Géométrie & Polynômes**

## DEVOIR SURVEILLÉ 1

DURÉE 2H

*Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. On s'attachera également à ce que les réponses soient données dans leur formulation la plus simplifiée possible.*

**Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :**  
**l'une comportant les exercices 1, 2 et 3 ; l'autre les exercices 4 et 5.**

**Exercice 1.**

1. Donner la forme polaire de  $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{5}}$ .
2. Donner les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  telles que le nombre  $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$  est imaginaire pur.
3. Justifier que si  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont deux racines sixièmes de  $Z_0$ , alors  $\frac{\alpha}{\alpha'}$  est une racine sixième de l'unité ; en déduire une expression de toutes les racines sixièmes de  $Z_0$  à l'aide de  $\alpha$ .
4. Sachant que  $(2+4i)^6 = 7488+2816i$  donner, sous forme cartésienne, les racines sixièmes de  $7488+2816i$ .

**Exercice 2.**

1. Trouvez tous les nombres complexes  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $z^2 + (-3 + 4i)z - 1 - 7i = 0$ .
2. Trouvez les nombres complexes  $z \in \mathbb{C}$  solutions de l'équation

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + (-3+4i)\left(\frac{z+i}{z-i}\right) - 1 - 7i = 0.$$

**Exercice 3.**

1. Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan. Donnez, en la justifiant, une condition nécessaire et suffisante sur leurs affixes respectives  $z_A, z_B$  et  $z_C$  pour que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  soient colinéaires.
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que les points d'affixe  $i, z, iz$  soient alignés.

**Exercice 4.** Le but de cet exercice est de trouver une formule explicite par radical de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

1. On considère l'équation (E)  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ .
  - (a) Montrer que 0 et 1 ne sont pas solution de (E).
  - (b) Montrer que toute solution de (E) est une racine  $n^{\text{ième}}$  de l'unité pour un  $n$  que l'on précisera.
  - (c) En déduire les solutions des (E) sous forme polaire.
2. (a) Développer  $z^2\left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1\right)$ .
  - (b) Résoudre l'équation  $Z^2 + Z - 1 = 0$ .
  - (c) En déduire les solutions de (E) sous forme cartésienne.
3. En déduire une formule explicite pour  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

**Exercice 5.** On note  $E$  l'ensemble  $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ , que l'on appellera "l'alphabet E". Soit  $M$  l'ensemble des mots de 5 lettres prises chacune dans l'alphabet E, comme par exemple "aaaaa", "ebegb" ou "aebcf".

Dans les questions suivantes, on demande à chaque fois de déterminer, en le justifiant, combien il existe de mots dans  $M$  qui vérifient une certaine propriété.

1. Quel est le nombre total de mots de  $M$  ?
2. Quel est le nombre de mots tels que toutes les lettres sont différentes.
3. Quel est le nombre de ceux qui commencent et finissent par un  $a$  ?
4. Quel est le nombre de mots qui contiennent exactement une fois la lettre  $a$ .
5. Quel est le nombre de mots qui contiennent au moins une fois la lettre  $a$  ?
6. Quel est le nombre de mots qui s'écrivent avec exactement 2 lettres différentes.