

Géométrie & Polynômes, double cursus archi

DEVOIR SURVEILLÉ 1

DURÉE 2H

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. On s'attachera également à ce que les réponses soient données dans leur formulation la plus simplifiée possible.

Calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'examen.

Exercice 1. Soit $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 puis u^4 .
2. Donner la forme polaire de u .
3. Donner une formule explicite pour $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 2.

1. Trouvez tous les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $iz^2 + (1 - 3i)z - 6 + 2i = 0$.
2. Trouvez les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ solutions de l'équation

$$i \left(\frac{z - 2\bar{z}}{2i} \right)^2 + (1 - 3i) \left(\frac{z - 2\bar{z}}{2i} \right) - 6 + 2i = 0.$$

Exercice 3. Soit $\omega := e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $A := \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B := \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Entre $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, déterminer qui est le plus grand.
2. Déterminer le signe de la partie imaginaire de A .
3. Calculer $1 + A + B$ et AB .
4. En déduire une équation vérifiée par A .
5. En déduire la valeur de A puis celle de B .

Exercice 4. Soit $A = (1, 1)$ et $B = (0, 1)$ deux points du plan.

1. Si M est le point d'affixe z , donner une condition sur $\frac{z-i-1}{z-i}$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ soient orthogonaux.
2. Donner l'ensemble des points M du plan tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires.

Exercice 5. Dans ce problème, on appellera *drapeau à 3 bandes* tout drapeau à 3 bandes verticales, chaque bande ayant une couleur choisie dans un panel de 10 coloris (blanc, noir, bleu, rouge, vert, jaune, orange, violet, gris ou turquoise). Par exemple, le drapeau français (bleu, blanc, rouge), le drapeau belge (noir, jaune, rouge), le drapeau nigérien (vert, blanc, vert), le drapeau anarchiste (noir, noir, noir) ou même le drapeau du Jétinventeménistan (violet, turquoise, turquoise) sont des drapeaux à 3 bandes. Mais ne sont pas considérés comme drapeau à 3 bandes le drapeau allemand, car les bandes sont horizontales, ni le drapeau anglais.

1. Quel est le nombre total de drapeaux à 3 bandes possibles ?
2. Quel est le nombre de drapeaux à 3 bandes faisant intervenir 3 couleurs différentes ?
3. Quel est le nombre de drapeaux à 3 bandes dont la bande de droite est violette ?
4. Quel est le nombre de drapeaux à 3 bandes contenant exactement une bande rouge ?
5. Quel est le nombre de drapeaux à 3 bandes contenant au moins une bande noire ou une bande blanche ?
6. Quel est le nombre de drapeaux à 3 bandes dont deux bandes côte-à-côte sont toujours de couleurs différentes ?