Aix–Marseille Université	2012–2013

Géométrie & Polynômes

DEVOIR SURVEILLÉ 2

DURÉE 2H

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barême indiqué n'est qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies : l'une comportant la question de cours ainsi que les exercices 1 et 2 ; l'autre les exercices 3, 4 et 5.

Question de cours (3 pts)

Énoncez et démontrez le lemme de Gauss pour les entiers relatifs.

Exercice 1 (3 pts)

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 familles (appelées "couleurs": Carreau, Coeur, Pique, Trèfle) de 8 cartes (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). On appelle main tout ensemble de 5 cartes prises dans un tel jeu.

a) Combien de mains rouges possibles (rouge signifie "Carreau ou Coeur")?

b) Combien de mains avec un seul Roi et une seule Dame ?

c) Combien de mains avec un seul Roi et exactement deux Trèfles ?

Exercice 2 (4pts)

a) Démontrez en effectuant l'algorithme d'Euclide que le PGCD de 703 et 399 est 19.

b) Trouvez tous les entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que: $703p + 399q = 59$.

c) Trouvez tous les entiers $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que: $703u + 399v = 57$.

Exercice 3 (3 pts)

Soit n un entier > 1. On note r le reste de la division euclidienne de n par 3.

a) Exprimez le reste de la division euclidienne de 4^n par 9 en fonction de r (on pourra raisonner en utilisant les congruences modulo 9).

b) Montrez que $4^n - 3n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 4 (4 pts)

On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 4X^2 + 8X - 4$.

a) Calculez $P(1+i)$ (on rédigera le détail des calculs sur la copie).

b) Déterminez les racines de P dans $\mathbb{C}$. (On pourra justifier le fait que $1-i$ est racine de P).

Exercice 5 (4 pts)

On considère le polynôme $P(X) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^{2p}$.

a) Donnez une formule simple de $P(X)$. Déterminez son degré, ses racines et la multiplicité de chacune.

b) En utilisant la question précédente, donnez une expression simple du polynôme suivant:

$$Q(X) = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \, 2p \, X^{2p-1}.$$

c) Développez $(1+X^2)^{n-1}$ par la formule du binôme. Déduire grâce à la question (b) que $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n$.