Géométrie & Polynômes

DEVOIR SURVEILLÉ 3

DURÉE 2H

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème indiqué n'est qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1, 2 et 3 ; l'autre les exercices 4 et 5.

Exercice 1 : Nombres complexes (3 pts)

Si z est un nombre complexe non nul, on appelle $M(z)$ le point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe $z^2 - 1$ et $N(z)$ le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$.

- Déterminez les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que O , $M(z)$ et $N(z)$ soient alignés.
- Déterminez les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM(z)}$ et $\overrightarrow{ON(z)}$ soient orthogonaux.

Exercice 2 : Fractions rationnelles (4 pts)

On considère la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X+1}{X^2(X^4-1)}$.

- Donner la décomposition théorique en éléments simples de $F(X)$ sur $\mathbb{R}(X)$.
- Calculer cette décomposition.

Exercice 3 : Polynômes (4 pts)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, unitaire et de degré n supérieur ou égal à 3.

On suppose que $P(X) = (X-a)^\alpha(X-b)^\beta(X-c)^\gamma$, avec a, b, c des nombres complexes distincts, et α, β et γ des entiers non nuls.

- Donner une relation entre n , α , β et γ .
- Prouver que $P'(X) = (X-a)^{\alpha-1}(X-b)^{\beta-1}(X-c)^{\gamma-1}Q(X)$ où Q est un polynôme à expliciter.
- Montrer que Q n'admet ni a , ni b , ni c comme racine.
- Démontrer que $\text{pgcd}(P, P') = (X-a)^{\alpha-1}(X-b)^{\beta-1}(X-c)^{\gamma-1}$.

Exercice 4 : Géométrie (6 pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soient $A(2, -2, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(1, 3, -3)$ trois points.
 - a. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
 - b. Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan P contenant A , B et C .
 - c. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal D' du point $D(3, 2, 1)$ sur le plan P et calculer la distance de D au plan P .
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre réel et P_α le plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 - 2t + \alpha t' \\ z = 1 + \alpha t - t' \end{cases}$$

avec paramètres $t, t' \in \mathbb{R}$.

- a. Vérifier que P_α est bien un plan et en donner une équation cartésienne.
- b. Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que les plans P et P_α ont un vecteur normal commun.
- c. Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $B \in P_\alpha$.
- d. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que les plans P et P_α soient confondus ?

Exercice 5 : Arithmétique (5 pts)

1. Donner la définition d'un nombre entier premier et celle de deux nombres entiers premiers entre eux.
2. Soit p un nombre entier premier.
 - a. Montrer que p est premier avec tout entier compris entre 1 et $p - 1$.
 - b. Par exemple en considérant l'entier $k! \binom{p}{k}$, montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour tout entier k compris entre 1 et $p - 1$. Montrer par un exemple que cela devient faux si l'on ne suppose plus p premier.
 - c. En déduire que pour tout entiers $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
 - d. En déduire par récurrence que $n^p \equiv n \pmod{p}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
 - e. En déduire que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ pour tout entier n non multiple de p .