Géométrie & Polynômes

INTERROGATION 4

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
(b) Avec $a, b \in \mathbb{C}$, développer $(a+b)^7$.
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$.

2. On considère une urne avec 10 boules numérotées de 1 à 10 et une grille de 5 cases alignées horizontalement.
 - (a) On tire successivement 5 boules. A chaque fois, on note le numéro de la boule dans la case vide la plus à gauche avant de remettre la boule dans l'urne. Combien de grilles remplies différentes peut-on obtenir ?
 - (b) Même question si on note cette fois le numéro de la boule dans la case vide la plus à droite.
 - (c) Même question si on se contente, à chaque fois, de mettre la boule tirée de côté.
 - (d) On tire maintenant simultanément les 5 boules et on note leurs numéros dans les cases par ordre croissant de gauche à droite. Là encore, combien obtient-on de grilles différentes ?

3. Trouver une identité de Bézout entre les entiers 74 et 761.