

**Géométrie & Polynômes**

## INTERROGATION 6

1. (a) Pour tout  $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , calculez  $x^3$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 6 divise  $5n^3 + n$  et  $7n^3 - n$ .  
(b) Montrer que 11 divise  $2^{123} + 3^{121}$ .
2. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers positifs premiers entre eux. Montrer que  $a + b$  est premier avec  $a$ , puis montrer que  $a + b$  est premier avec  $ab$ .
3. (a) Soit  $P(X) := a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  et  $Q(X) := b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$  deux polynômes de degré respectifs  $n$  et  $m$ .
  - i. Donner le coefficient de degré  $k \in \mathbb{N}$  du produit  $P(X)Q(X)$  en fonction des coefficients de  $P(X)$  et de  $Q(X)$ .
  - ii. Que peut-on dire du degré des polynômes  $P(X)Q(X)$ ,  $P(X) + Q(X)$  et  $P(X) - Q(X)$ ?(b) Soit  $R(X) := 1 - X + 2X^3$  et  $S(X) := 2X - X^3 + X^4$ .
  - i. Le polynôme  $R(X)$  est-il unitaire?
  - ii. Calculez  $S'(X)$ ,  $(R(X))^2$  et  $R(X)S(X) - 2XR(X)$ .