Aix-Marseille Université — 2012–2013

M1 - Parcours PEIP

PLANCHE 2

DÉNOMBREMENT, ARITHMÉTIQUE

I - Cardinaux, dénombrement

On appelle cardinal d'un ensemble fini le nombre d'éléments de cet ensemble. Dénombrer un ensemble c'est trouver son cardinal.

Exercice 1. Dans une salle de classe, il y a 30 tables. De combien de façons peuvent prendre place 27 élèves ? 30 élèves ? 31 élèves ?

Exercice 2. Calculer le nombre de :

- nombres de six chiffres qui commencent par un 1.
- nombres de six chiffres qui finissent par un 1.
- nombres de 6 chiffres qui contiennent au moins un 1.
- nombres de 6 chiffres qui contiennent exactement un 1.

(Attention au premier chiffre!)

Exercice 3. On tape cinq chiffres au hasard sur un pavé numérique (de 0 à 9).

1. Combien de nombres de cinq chiffres commencent par un 1.
2. Calculer la probabilité pour que les 5 chiffres forment une suite strictement croissante? *(l'ordre des nombres choisis est-il important?)*
3. Si la suite finie $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est croissante, que dire de $(u_1, u_2 + 1, u_3 + 2, u_4 + 3, u_5 + 4)$?
4. Calculer la probabilité d'obtenir une suite simplement croissante?

Exercice 4. **Triangle de Pascal**

1. Montrer par le calcul les formules ci-dessous.
$$(a) \qquad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \quad \text{pour } 0 \leq p < n$$
$$(b) \qquad C_n^p C_p^k = C_n^k C_{n-k}^{p-k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq p \leq n$$
2. Les démontrer maintenant sans calculs. Pour (a), on fixera un élément x dans un ensemble E et on comptera les parties à p éléments qui contiennent a, puis celles qui ne le contiennent pas.

   Pour (b), on dénombrera de deux manières différentes les choix possibles de parties à k éléments dans les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments).

Exercice 5. Déterminez un entier n tel que $C_n^3 = C_n^5$.

Exercice 6. Etablir la relation: $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$. puis
$$C_n^p = C_{n-q}^p + C_q^1 C_{n-q}^{p-1} + C_q^2 C_{n-q}^{p-2} + \cdots + C_q^{q-1} C_{n-q}^{p-q+1} + C_{n-q}^{p-q}$$

Exercice 7. Le binôme de Newton

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$.

   (1ère méthode : utiliser la formule du binôme. 2ème méthode : fixer $a \in E$ de cardinal n, et montrer que l'application $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ qui à un ensemble X associe $X \cup \{a\}$ ou $X \setminus \{a\}$ suivant que a est ou non dans X est une bijection qui transforme les parties de cardinal pair en parties de cardinal impair).

2. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$, *(dériver la fonction $x \mapsto (1+x)^n$).*

3. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$ *(cette fois-ci il faut intégrer).*

4. Simplifier $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$ *(calculer le coefficient de x^n dans $(1+x)^n(1+x)^n$).*

5. Calculer $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2k}$ où $[\frac{n}{2}]$ désigne la partie entière de $n/2$ *(développer $(1+1)^n + (1-1)^n$).*

$(*)$ **Exercice 8. Poker**

Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes. Une main est constituée de 5 de ces cartes. Combien y a-t-il de mains possibles? Le jeu est mélangé aléatoirement et on distribue une main. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. une couleur (5 cartes de la même couleur)
2. une paire (2 cartes de même rang, et 3 autres cartes de rangs tous distincts)
3. Une double paire
4. Un brelan (3 cartes de même rang, et 2 autres cartes de rangs tous distincts)
5. un full (une paire et un brelan)
6. un carré (quatre cartes de même rang et une carte d'un autre rang)
7. Une suite (5 cartes de rangs consécutifs)
8. Une suite finissant par un as
9. une suite avec des cartes d'une seule couleur.

$(*)$ **Exercice 9.** Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq n$. Trouver le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Montrer qu'il y a autant d'applications croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ que d'applications strictement croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n+p-1\}$.

Exercice 10. Dans le plan on donne n point disctincts $A_1, \cdots A_n$ tels que trois quelconques d'entre eux ne soient jamais alignés. Combien ces points déterminent-ils de droites ?

Exercice 11. Quel est le nombre de cotés d'un polygone qui a 119 diagonales?

II- Arithmétique

Exercice 12. Calculer le pgcd δ de $a = 126$ et de $b = 72$, ainsi que leur ppcm μ, puis le produit ab ainsi que $\delta\mu$. Que remarque-t-on ? Enoncer un résultat général, et le démontrer.

Exercice 13. Quel est le reste de la division euclidienne de 5^{2247} par 13 ?

Exercice 14. Démontrer (en faisant un raisonnement par l'absurde) que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 15. Prouver, en raisonnant par l'absurde, que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 16. Montrer que pour tout entier n, 3 divise $n^3 - n$.

Exercice 17. Montrez que si k est un entier positif et impair, alors $5^k + 1$ est toujours divisible par 6. (Indication: on cherchera à calculer la valeur de $5^k + 1$ modulo 6.)

Exercice 18. Trouvez tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $15x + 24y = 5$.

Exercice 19. Trouvez tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $3x - 7y = 0$.

Trouvez tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $3x - 7y = 19$.

Exercice 20. Soient a et b des entiers strictement positifs tels que $a < b$.

Déterminez le plus petit entier $k \geq 1$ tel que ka soit multiple de b.

Exercice 21. Démontrer qu'il n'y a pas de solutions entières à l'équation $x^2 - y^2 = 250$

(indication : on pourra travailler modulo 4).

Exercice 22. Montrer que les entiers $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$ sont premiers entre eux.

Déterminer le pgcd de $2^n + 3^n$ et $2^{n+2} + 3^{n+2}$ (on sera amené à envisager deux cas).

$(*)$ **Exercice 23.** *Théorème de Wilson*

Soit p un nombre premier.

1. Prouver que tout élément de l'ensemble $\{\bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, est *inversible* c'est-à-dire : $\forall \bar{x}, \exists \bar{y}$ tel que $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$.
2. Déterminer les éléments qui sont leur propre inverse, c-a-d les $\bar{x}$ tels que $(\bar{x})^2 = \bar{1}$.
3. Prouver que $(p-1)! \equiv -1[p]$

Exercice 24. *Divisibilité par* $9, 11, 7$

• On cherche d'abord à démontrer le résultat classique : **un nombre est divisible par** 9 **si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de** 9.

1. Calculer 10^i modulo 9 pour tout entier i.
2. En utilisant l'écriture d'un nombre $m = k_n k_{n-1} \dots k_1 k_0$ sous la forme $\sum_{i=0}^{n} k_i 10^i$, exprimer $m[9]$ et en déduire le critère annoncé.
3. Application : 8431848 et 21568137888 sont-ils divisibles par 9?

• Un critère de **divisibilité par** 11.

1. Reprendre les questions précédentes en les adaptant et trouver un critère simple de divisibilité par 11.
2. Application : 502720427 et 23929159736 sont-ils divisibles par 11?

($*$) • Un critère de **divisibilité par** 7.

1. Utiliser la décomposition $m = 10 \times k_n k_{n-1} \dots k_1 + k_0$ et les congruences modulo 7 pour démontrer que m est divisible par 7 si et seulement si $k_n k_{n_1} \dots k_1 - 2k_0$ est divisible par 7. Remarquer que ceci constitue un critère de divisibilité par 7 car la longueur du deuxième nombre est inférieure de 1 à celle du premier, donc de proche en proche on regarde des nombres de plus en plus petits.
2. Application : 12997 et 101941 sont-ils divisibles par 7?