Géométrie & Polynômes

PLANCHE 3

POLYNÔMES

Exercice 1. Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2. Déterminez tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = P(2) = 0$ et $\deg(P) \leq 3$. Déterminez tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(1) = Q'(1) = 0$ et $\deg(Q) \leq 4$.

Exercice 3. Déterminez le polynôme P de degré 2 tel que: $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P''(0) = 5$.

Exercice 4. Déterminez le polynôme P tel que $P(1) = 3$, $P'(1) = 2$, $P''(1) = -1$ et $P^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \geq 3$.

Exercice 5. Déterminer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 6. Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes suivants:

i) $X^2 + X + 1$

ii) $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$

iii) $X^6 + 1$

iv) $X^4 + X^2 + 1$.

v) $X^3 + X^2 + X + 1$

vi) $X^3 + c$, pour $c \in \mathbb{R}$.

Ecrire la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$ des polynômes ci-dessus. En déduire leur décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Considérons le polynôme $X^2 + bX + c$, et ses deux racines λ_1 et λ_2 .

1) Exprimez en fonction b et c la somme des racines $\lambda_1 + \lambda_2$. Faire de même pour le produit des racines $\lambda_1 \lambda_2$.

2) On cherche à résoudre le système d'équations $\begin{cases} u + v = 3 \\ uv = -2 \end{cases}$

a) Montrer que u et v sont les deux racines du polynôme $X^2 - 3X - 2$.

b) Résoudre le système d'équations.

3) Appliquer la même méthode pour le système $\begin{cases} u + v = 1 + i \\ uv = i \end{cases}$

Exercice 8. Polynômes bi-carrés

Voici un exemple de polynôme de degré 4 dont on sait trouver les racines. Ce sont les polynômes bi-carrés qui sont de la forme:

$$P(X) = X^4 + bX^2 + c$$

1) Poser $Y = X^2$. Trouver un polynôme Q de degré deux tel que $Q(Y) = P(X)$. Quelles sont les racines de Q ?

2) En déduire les racines de P .

3) Applications: Quelles sont les racines de $X^4 - 3X^2 + 1$? Et celles de $X^6 - 3X^2 + 2$?

Exercice 9. On considère le polynôme $P = X^3 + pX + q$ où p, q sont des reals.

- 1) Montrez que si P possède une racine double, alors $4p^3 + 37q^2 = 0$.
- 2) Réciproquement, montrez que si $4p^3 + 37q^2 = 0$ alors P possède une racine double.

Exercice 10. Division euclidienne

1) Effectuer la division euclidienne de P par Q pour les polynômes P et Q suivants:

i) $P = X^3 + 1, Q = X^2 + 1$ ii) $P = X^4 - 1, Q = X^2 - 1$

iii) $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1, Q = X^2 - 1$

- 2) Les polynômes P et Q ci-dessus sont-ils premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$?
- 3) Pour les polynômes ci-dessus qui sont premiers entre eux, trouver U et $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 11. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$? Quel est le reste de la division euclidienne de P par $2X + 3$?

Exercice 12. Développez $X^n = (X + 1 - 1)^n$ à l'aide de la formule du binôme. En déduire une expression du reste et du quotient de la division euclidienne de X^n par $X + 1$.

Exercice 13. Trouver les restes des divisions euclidiennes de

$$(X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$$

par $(X - 3)(X - 2), (X - 3)^3, (X - 2)^2$ et $(X - 3)^2(X - 2)^2$.

Exercice 14. Quelles sont les racines du polynôme :

$$1 - \frac{X}{1} + \frac{X(X - 1)}{2!} - \frac{X(X - 1)(X - 2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{X(X - 1) \dots (X - n + 1)}{n!}.$$

Exercice 15. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n . On note, pour $p < n$, u_p la somme des racines de $P^{(p)}$. Démontrer que $u_0, \dots, u_{n-1}$ forme une progression arithmétique.

Exercice 16. Soit, pour $n \geq 0$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Démontrer que P_n admet n racines simples.
2. Démontrer que, si n est impair, une et une seule de ces racines est réelle, et que si n est pair, aucune des racines n'est réelle.

Exercice 17. Polynômes de Chebyshev

Les polynômes de Chebyshev sont définis par récurrence de la manière suivante:

$$\begin{cases} P_0 = 1, & P_1 = X \\ \forall n \geq 1, & P_{n+1} = 2X P_n - P_{n-1} \end{cases}$$

- 1) Calculer P_2, P_3, P_4 .
- 2) Déterminer (par récurrence) le degré de P_n , et son coefficient dominant.

- 3) Rappeler la formule permettant d'exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction $\cos(\theta)$. Comparer avec $P_2(\cos(\theta))$.
- 4) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Fractions rationnelles

Exercice 18. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1.} & \frac{1}{X^3 - X} & \mathbf{2.} & \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} & \mathbf{3.} & \frac{X^3}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} \\
 \mathbf{4.} & \frac{2X^2 + 1}{(X^2 - 1)^2} & \mathbf{5.} & \frac{X^3 + 1}{(X - 1)^3} & \mathbf{6.} & \frac{X^4 + 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)}
 \end{array}$$

Exercice 19.

- Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X + 1)(X + 2)}$.
- En déduire la limite de la suite (S_n) suivante : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)}$.

Exercice 20. Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{1.} & x \mapsto \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1} & \mathbf{2.} & x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \\
 \mathbf{3.} & x \mapsto \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x + 1} & \mathbf{4.} & x \mapsto \frac{2x - 1}{(x + 1)^2}
 \end{array}$$