Géométrie & Polynômes

PLANCHE 4

GÉOMÉTRIE

Exercice 1. Le plan et l'espace étant rapportés à un repère orthonormé, vérifier que les repères suivants sont également orthonormés :

dimension 2 :

$$\vec{U} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \vec{V} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

dimension 3

$$\vec{U} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad \vec{V} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \vec{W} \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right).$$

Exercice 2. On considère le plan rapporté à un repère orthonormé. Ecrire l'équation du cercle de centre $I = (1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 3. Soient $A(1, 2)$ et $B(-1, 3)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont orthogonaux ?

Exercice 4. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Exercice 5. On se donne, dans $\mathbb{R}^3$, le plan P défini par les points $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 2, 0)$ et $C = (0, -1, 1)$. Donner les composantes d'un vecteur orthogonal à P puis une équation cartésienne de P .

Exercice 6. On considère le plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.

1. Donner les composantes d'un vecteur orthogonal à P .
2. En déduire l'équation paramétrique de la droite passant par $A = (1, 1, 1)$ et orthogonale à P .
3. Calculer la distance du point A au plan P .

Exercice 7. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$. On donne la droite D d'équations paramétriques :

$$x = 1 + \frac{t\sqrt{66}}{6} \quad y = \frac{t\sqrt{6}}{6} \quad z = \frac{2t\sqrt{6}}{6};$$

et la droite Δ d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}.$$

Calculer le cosinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

Exercice 8. On considère les trois points $A(3, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$ et $C(-2, 2, 1)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 9. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Montrer que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Que peut-on en déduire si, dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont formées d'arêtes orthogonales ?

Que peut-on aussi en déduire si dans un quadrilatère plan, les côtés opposés sont perpendiculaires ?

Dessiner un tel quadrilatère.

Exercice 10. (*Extrait du DS n°4 posé en 2009-2010.*) Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes a, b et c .

1. Rappeler les expressions des normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de a, b et c .
2. En supposant que ce soit le cas, donner la formule exprimant que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AC}$ par une rotation de centre A et d'angle α .
3. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et donc du triangle ABC si

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ?$$

4. Montrez que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 1)$; $\vec{v}(2, 1, 0)$ et $\vec{w}(1, -1, 2)$.

Calculer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. Qu'en déduit-on pour le produit vectoriel ?

Exercice 12. Soient A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace orienté. Montrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}.$$

Exercice 13. (*Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.*) Soient $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(2, 2, 1)$ trois points de l'espace.

1. Vérifier que ces points ne sont pas alignés.
2. Calculer l'aire du triangle ABC . En déduire la valeur absolue du sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.
3. Donner un vecteur de norme 1 orthogonal au plan P défini par les points A, B et C .

Exercice 14. (*Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.*) Soit P le plan d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + s \\ z = 2t - s \end{cases} \quad \text{avec } (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

1. Vérifier que l'origine $O(0, 0, 0)$ et le point A de coordonnées $(3, 5, 1)$ appartiennent à P .
2. Déterminer l'équation cartésienne de P et donner un vecteur normal au plan P .
3. Donner une équation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire à P .

Exercice 15. (Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.) Soit P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une équation paramétrique de la droite D passant par M_0 et orthogonale au plan P .
2. Donner le point d'intersection entre D et P .
3. Montrer que la distance entre M_0 et P est donnée par

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4. En déduire les coordonnées du symétrique de M_0 par rapport au plan P .

Exercice 16. (Extrait du DS n°4 posé en 2008-2009.) Soient D et D' deux droites de l'espace. Si H est un point de D et H' un point de D' qui sont tels que la droite (HH') soit orthogonale à D et orthogonale à D' , on dit que (HH') est la perpendiculaire commune à D et D' , et que HH' est la distance entre D et D' .

Soient les deux droites

$$D \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad D' \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = -2t \end{cases}$$

1. Donner des vecteurs directeurs de D et D' puis un vecteur directeur d'une éventuelle perpendiculaire commune à D et D' .
2. On note $(x_H, y_H, z_H) = (1 + t_H, 1 - t_H, t_H)$ où $t_H \in \mathbb{R}$, les coordonnées d'un point $H \in D$. Donner l'équation paramétrique de la droite Δ_H passant par H et perpendiculaire aux vecteurs directeurs de D et D' . Montrez qu'il existe un et un seul point $H \in D$ tel que Δ_H coupe D' . Calculez les coordonnées de ce point H , puis celle du point d'intersection H' de Δ_H et de D' .
3. Montrez que la perpendiculaire commune à D et D' existe et est unique, et en donner une équation paramétrique.
4. Calculer la distance entre D et D' .

Exercice 17. Soit ABC un triangle non aplati du plan. Soit (a, b) , (c, d) et (e, f) trois couples de réels de sommes non nulles. On désigne par C' le barycentre $\text{Bar}((A, a); (B, b))$, A' le barycentre $\text{Bar}((B, c); (C, d))$ et B' le barycentre $\text{Bar}((A, e); (C, f))$. Montrer que les points A' , B' et C' sont alignés si et seulement si $ace = -bdf$.

Exercice 18. On considère un triangle MAB . On note A' et B' les milieux respectifs des segments $[MB]$ et $[MA]$. Soit H le barycentre de $(A; 2); (M; 5)$ et K le barycentre de $(A; 2); (B; 3)$ et $(M; 5)$.

1. Montrez que K est le barycentre de $(H; 7); (B; 3)$ et que K est aussi barycentre de $(A'; 3)$ $(B'; 2)$.
2. En déduire que K est le point d'intersection des droites $(A'B')$ et (BH) . Faire un dessin.
3. La droite (MK) coupe la droite (AB) en R . Montrez que R est barycentre de $(A; 2); (B; 3)$.
4. On suppose que le point M décrit un cercle de centre A et de rayon r . Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble décrit par le point K .

Exercice 19. (*Extrait du DS n°5 posé en 2011-2012.*) Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C et D distincts deux à deux. On note I le milieu de $[BD]$, J le milieu de $[AC]$ et O l'isobarycentre de (A, B, C, D) . On construit les triangles rectangles isocèles ABM, BCN, CDP et DAQ tels que les angles orientés $(\widehat{MB, MA}), (\widehat{NC, NB}), (\widehat{PD, PC})$ et $(\widehat{QA, QD})$ aient pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On note enfin K le milieu de $[MP]$ et L le milieu de $[NQ]$.

On se propose d'étudier la configuration (I, J, K, L) . A cet effet, on prendra un repère orthonormal direct d'origine O et on introduit les affixes a, b, c, d de A, B, C, D , les affixes m, n, p, q de M, N, P, Q et les affixes f, g, k, l de I, J, K et L .

1. Déterminer l'affixe du milieu $[IJ]$.
2. Prouver que $m = \frac{a-ib}{1-i}$. Calculer de manière analogue n, p et q .
3. Déterminer l'isobarycentre de (M, N, P, Q) . En déduire le milieu de $[KL]$.
4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que $r(J) = K$.
5. Montrer que (I, J, K, L) est un carré de centre O .