Université Aix-Marseille 2013–2014

**Parcours CUPGE**
**Introduction à l'analyse**

COURS
CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES

# 1 Quelques notations

## 1.1 Notations de logique

### 1.1.1 Quantificateurs

L'objectif des notations suivantes est de mettre en place un langage écrit évitant toute forme d'ambiguité.

Dans ce qui suit, on appellera *proposition* toute affirmation portant sur des objets, par exemple "le carré d'un nombre réel est toujours positif", "$\sqrt{2}$ est irrationnel" ou "le logarithme d'un réel strictement positif est toujours positif". Notons qu'une proposition n'est pas nécessairement vraie. Le troisième exemple est, par exemple, faux mais cela ne nous empêche pas de l'énoncer.

On pourra prendre une notation pour une proposition, par exemple $P$, et l'on pourra même, au besoin, préciser $P(x)$ si cette affirmation porte sur un objet $x$. Par exemple, on pourra noter $P(x)$ l'affirmation "$\cos(x) > 0$".

Bien entendu, dans ce dernier exemple, la proposition $P(x)$ n'a pas de sens en elle-même car on ne sait pas qui est $x$, on ne peut donc absolument pas savoir si $\cos(x)$ est positif ou non. Afin de corriger cela, on introduit les notations suivantes :

**Notation 1.** Soit $P(x)$ une affirmation portant sur un objet $x$.

1. Si l'on veut affirmer que $P(x)$ est vrai pour tous les $x$ d'un ensemble $E$, on écrira :$\forall x \in E, P(x)$.
2. Si l'on veut affirmer qu'il y a au moins un élément (éventuellement plusieurs) $x$ d'un ensemble $E$ tel que $P(x)$ soit vrai, on écrira :$\exists x \in E, P(x)$.
3. Si l'on veut affirmer qu'il y a un et un seul élément $x$ d'un ensemble $E$ tel que $P(x)$ soit vrai, on écrira :$\exists! x \in E, P(x)$.

On appelle $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ des quantificateurs.

Chacune de ces trois affirmations est une nouvelle proposition et est donc susceptible d'être soumis à des quantificateurs. On peut donc combiner des quantificateurs et affirmer, par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. L'affirmation se lit alors de gauche à droite en "Pour tout réel $x$, on peut trouver un réel $y$ tel que la somme $x + y$ soit strictement positif". Dans cette affirmation, le $y$ peut tout à fait dépendre de $x$ car il est introduit après $x$. De fait, l'affirmation est vraie car on peut prendre, par exemple, $y = 1 - x$.

⚠ : Du fait de la remarque précédente, l'ordre des quantificateurs est important. Par exemple, $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0$ est faux car il faudrait trouver un réel $y$ tel que $x + y$ soit positif pour TOUT $x$, en particulier pour $x = -1 - y$, ce qui est faux.

⚠ : Si une proposition parle d'une variable, par exemple $x$, elle doit nécessairement être précédé d'un quantificateur portant sur ce $x$ car sinon on ne sait pas de qui on parle et cela n'a pas de sens.

### 1.1.2 Négation

**Définition 2.** Pour toute proposition $P$, on appelle négation de $P$ la proposition qui affirme que $P$ est fausse. Dans la litterature, la négation de $P$ peut être notée non$(P)$, $\neg P$ ou $\overline{P}$.

*Remarques* 3.

1. La proposition "$\forall x \in E, P(x)$" affirme que $P(x)$ est vrai pour tous les éléments de $E$. Dire que cela est faux, c'est dire que l'on peut trouver un contre-exemple $x_0$ dans $E$ tel que $P(x_0)$ soit faux, c'est-à-dire que tel que $\neg P(x_0)$ est vrai.
2. La proposition "$\exists x \in E, P(x)$" affirme que $P(x)$ est vrai pour au moins un élément de $E$. Dire que cela est faux, c'est dire que $P(x)$ est faux pour tous les éléments de $E$, c'est-à-dire que $\neg P(x)$ est vrai pour tout les éléments de $E$.

On déduit de cette remarque la proposition suivante :

**Proposition 4.** *Pour toute proposition $P$ portant sur les éléments d'un ensemble $E$, on a*
- $\neg(\forall x \in E, P) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg P$ ;
- $\neg(\exists x \in E, P) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg P$.

Si une proposition commence par plusieurs quantificateurs, on fera donc récursivement la négation de chacun de ces quantificateurs. Par exemple, la négation de "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$" est "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$".

## 1.2 Notations d'ensembles

Nous ne rentrerons pas dans les détails d'une définition formel de ce qu'est un ensemble. On se contentera de comprendre cela comme un "sac" qui contient des éléments. Notons toutefois que ce "sac" peut contenir une infinité d'éléments, comme par exemple $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Il peut également contenir d'autres sacs, comme par exemple l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ : chaque intervalle est lui-même un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Conventionellement, pour décrire un ensemble, on encadre par des accolades la description de ce qu'est un élément de cet ensemble. On notera, par exemple, $\{$habitant de Marseille$\}$ l'ensemble des habitants de Marseille car un élément de cet ensemble est un habitant de Marseille et que tout habitant de Marseille est un élément de cet ensemble.

Dans le cas particulier d'un ensemble fini possédant peu d'élément, on pourra mettre entre accolade la liste exhaustive des éléments. Par exemple, on pourra noter $\{a, b, c, d, e\}$ l'ensemble des cinq premières lettres de l'alphabet latin.

Un autre exemple pourra être $\{\text{nombre réel dont le carré est strictement plus grand que } 1\}$. Bien entendu, plutôt qu'une longue phrase, on pourra vouloir écrire $\{\text{nombre réel } x \text{ tel que } x^2 > 1\}$ ou encore $\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 > 1\}$. Dans ce cas, on peut noter "tel que" par une grande barre verticale. Cela donne alors $\{x \in \mathbb{R} | x^2 > 1\}$.

Il se peut enfin que la description des éléments d'un ensemble nécessite l'intervention de paramètres. On les utilise alors dans la description des éléments de l'ensemble, mais on précise leur nature à droite de la barre verticale. L'ensemble des multiples de $\pi$ pourra donc s'écrire $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Bien entendu, toutes ces notations peuvent se mêler. L'ensemble des multiples de $\pi$ dont le carré est strictement plus grand que 1 pourra, par exemple, s'écrire $\left\{k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}, (k\pi)^2 > 1\right\}$.

Enfin, par convention, on note $\emptyset$ l'unique ensemble, dit vide, qui ne contient rien.

⚠ : Les ensembles d'ensembles peuvent être pernicieux. On pourra remarquer que $\emptyset \neq \{\emptyset\} \neq \big\{\{\emptyset\}\big\}$. En effet, le premier est un sac vide. Le second est un sac qui contient un sac vide et le troisième un sac qui contient un sac qui contient un sac vide.

⚠ : On sera attentif à ne pas confondre un ensemble et un élément de cet ensemble. En particulier, un ensemble qui ne contient qu'un seul élément n'est pas égal à cet élément. On pourra, pour s'en convaincre, se référer au fait qu'un sac qui contient une bille n'est physiquement pas la même chose que la bille toute seule, surtout si le sac est fait d'une étoffe précieuse.

# 2 Applications

## 2.1 Définitions

**Définition 5.** Une application, c'est la donnée de trois choses :

1. un ensemble de départ $A$ ;
2. un ensemble d'arrivée $B$ ;
3. un processus qui transforme tout élément de $A$ en un élément de $B$.

**Notation 6.** Une application $f$ sera notée :

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

où $A$ est l'ensemble de départ, $B$ l'ensemble d'arrivée et, pour tout $x \in A$, $f(x)$ est l'élément de $B$ associé à $x$.

Il arrivera que le processus de transformation ne soit pas donné explicitement. On notera alors $f : A \to B$.

Plus rarement, les ensembles de départ et d'arrivée seront sous-entendus ou laissés à la discrétion du lecteur. On pourra alors écrire $\big(x \mapsto f(x)\big)$.

Le processus de transformation pourra être donné

de manière exhaustive :

$$f : \begin{array}{ccc} \{a,b,c\} & \to & \mathbb{Z} \\ a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & -2 \\ c & \mapsto & 1 \end{array} ;$$

par une formule :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{array} ;$$

par un mélange des deux :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \geq 0 & \mapsto & \sin(x) \\ x < 0 & \mapsto & x \end{array} .$$

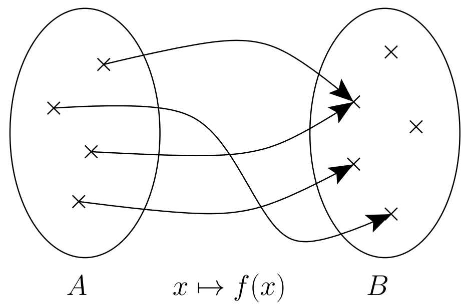
Dans le dernier cas, on pourra aussi écrire

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} .$$

Parfois, la définition de la transformation $\big(x \mapsto f(x)\big)$ pourra s'avérer plus sophistiquée. On pourra par exemple rencontrer

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & ]0,1[ \\ n & \longmapsto & \text{l'unique solution entre 0 et 1} \\ & & \text{de l'équation } t^n + t - 1 = 0 \end{array}$$

Graphiquement, on peut se représenter une application comme ceci :



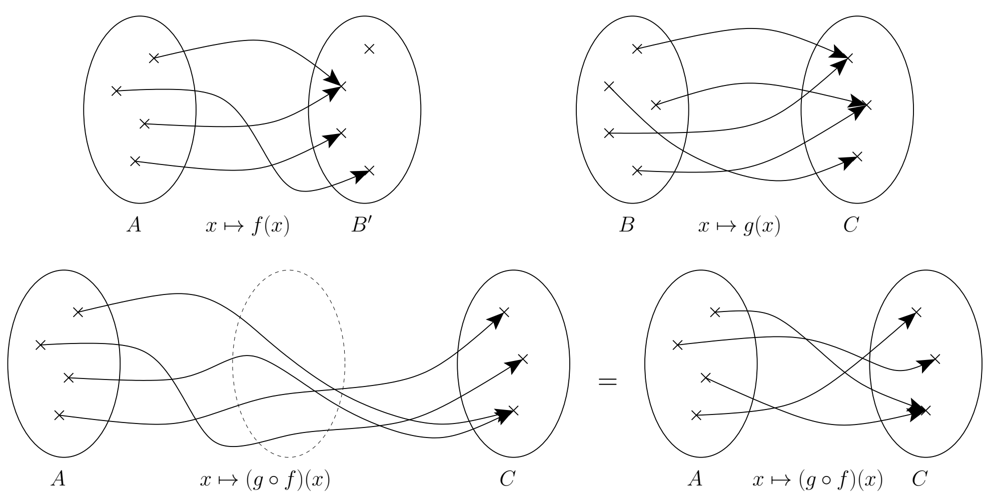

Les ensembles de départ et d'arrivée sont représentés comme des sacs ouverts vus de dessus, laissant ainsi apparaitre leurs éléments comme des points. Le processus de transformation, par des flèches qui relient chaque point de l'ensemble de départ à son point image. Par construction, il y a donc une unique flèche qui part de chaque point de l'ensemble de départ. Du point de vue de l'ensemble d'arrivée, par contre, plusieurs flèches peuvent pointer au même endroit, et certains points peuvent ne pas être pointé du tout.

**Définition 7.** Soit $f\colon A \longrightarrow B'$ et $g\colon B \longrightarrow C$ deux applications tels que l'espace d'arrivée $B'$ de $f$ soit inclue dans l'espace de départ $B$ de $g$. On définit alors *l'application composée* $g \circ f$ par

$$g \circ f\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

La composition $g \circ f$ consiste à appliquer $f$ puis $g$. L'ordre semble inversée dans la notation $g \circ f$ mais cela correspond au sens de lecture dans $g\big(f(x)\big)$. La condition $B' \subset B$ est essentielle pour que l'image par $g$ de $f(x)$ ait toujours un sens.

Graphiquement, chaque flèche de $g \circ f$ correspond au recollement d'une flèche de $f$ avec une flèche de $g$ :




## 2.2 Propriétés

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux différentes configurations possibles de flèches par rapport aux points de l'espace d'arrivée. Mais avant cela, donnons la définition suivante :

**Définition 8.** Soit $f\colon A \longrightarrow B$ une application. On appelle antécédent de $y \in B$ par $f$ tout élément $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

### 2.2.1 Injectivité

On veut interdire les configurations où plusieurs flèches pointent vers le même point.

**Définition 9.** Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est dite *injective* si

$$\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

La condition ci-dessus indique que si deux flèches arrivant au même point partent nécessairement du même point, il s'agit donc de la même flèche. Autrement dit, il ne peut pas y avoir deux flèches qui pointent vers le même point. Une façon de reformuler cela est de dire que tout point de l'espace d'arrivée possède au plus un antécédent par $f$. Notons que si un point de $B$ n'a pas d'antécédent, alors il ne peut pas être écrit sous la forme $f(x)$ et la condition ci-dessus n'indique rien à son sujet. Ce cas n'est donc pas interdit.

**Méthodologie :** Pour montrer qu'une application $f\colon A \longrightarrow B$ est injective, on pourra revenir à la définition et considérer deux points $x$ et $y$ (potentiellement égaux ou non) de $A$ tels que $f(x) = f(y)$ et manipuler cette dernière égalité pour montrer que cela implique $x = y$.
Pour montrer qu'elle n'est pas injective, il suffira d'exhiber deux points distincts ayant la même image.

*Exemples* 10.

1. L'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array}$ est injective. En effet, considérons $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow (x+1)(y-1) = (y+1)(x-1) \Rightarrow xy+y-x-1 = yx+x-y-1 \Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow x = y.$$
2. L'application $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$.

⚠ : L'injectivité ou la non injectivité d'une application dépend fortement de son espace de départ, et pas seulement du processus de transformation. En effet, on a vu que $g$ ci-dessus n'est pas injective, mais $\widetilde{g}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ l'est.

Voyons maintenant un critère simple d'injectivité.

**Définition 11.** Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow B$ une application
On dit que $f$ est croissante (resp. décroissante) si, pour tout $x, y \in A$, $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) \leq f(y)$).
On dit que $f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si, pour tout $x, y \in A$, $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).
On dit que $f$ est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante)

**Proposition 12.** *Toute application strictement monotone est injective.*

*Démonstration.* Raisonnons par contraposé en montrant que si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$. En effet, si $x \neq y$, alors $x > y$ ou $x < y$. Quitte à intervertir leurs rôles, on peut supposer que $x > y$. Mais alors si $f$ est strictement croissante, on a $f(x) > f(y)$ et si $f$ est strictement décroissante, on a $f(x) < f(y)$. Dans les deux cas, on a $f(x) \neq f(y)$. □

### 2.2.2 Surjectivité

On veut interdire les configurations où des points de l'espace d'arrivée ne sont pointés par aucune flèche.

**Définition 13.** Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est dite *surjective* si

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

Une façon de reformuler cela est de dire que tout point de l'espace d'arrivée possède au moins un antécédent par $f$. Notons que la condition ci-dessus n'interdit pas l'existence de plusieurs flèches pointant vers le point considéré. Les notions d'injectivité et de surjectivité sont donc indépendantes.

**Méthodologie :** Pour montrer qu'une application $f\colon A \longrightarrow B$ est surjective, on pourra donner, pour tout $y_0 \in B$, une solution à l'équation $f(x) = y_0$.
Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, il faudra exhiber une valeur $y_0 \in B$ donné telle que l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution.

*Exemples* 14.

1. L'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[ \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ est surjective. En effet, pour tout $y_0 \geq 1$, on a
$$\begin{aligned} f(x) = y_0 &\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = y_0 \\ &\Leftrightarrow 1 + x^2 = y_0^2 \text{ car } y_0 \geq 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y_0^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y_0^2 - 1} \text{ car } y_0^2 - 1 \geq 0. \end{aligned}$$
Il y a donc au moins une solution (dans ce cas, il y en a même deux).
2. L'application $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective car, $y_0 = -1$, l'équation $x^2 = y_0 = -1$ n'a pas de solution.

⚠ : L'injectivité ou la non injectivité d'une application dépend fortement de ses espaces de départ et d'arrivée, et pas seulement du processus de transformation. En effet, on a vu que $g$ ci-dessus n'est pas surjective, mais $\widetilde{g}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ l'est et $\widehat{g}\colon \begin{array}{ccc} [1,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ne l'est plus.

Voyons maintenant comment transformer toute application en application surjective.

**Définition 15.** Pour tout application $f\colon A \longrightarrow B$, on définit l'image de $f$, notée $\mathfrak{Im}(f)$, par $\mathfrak{Im}(f) := \{y \in B \big| \exists x \in A, y = f(x)\}$.

⚠ : il ne faut pas confondre l'image de $f$ et l'image $f(x)$ de $x$ par $f$. Le second est un élément de l'espace d'arrivée tandis que le premier est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. C'est le sous-ensemble des éléments qui ont au moins un antécédent. Les propositions suivante sont donc immédiates.

**Proposition 16.** *Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est surjective si et seulement si $B = \mathfrak{Im}(f)$.*

**Proposition 17.** *Pour toute application $f\colon A \longrightarrow B$, l'application $\widetilde{f}\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathfrak{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est surjective.*

⚠ : Lorsque $f$ n'est pas surjective, l'application $\widetilde{f}$ est différente de $f$ car elles ne possèdent pas le même ensemble d'arrivée. C'est pourquoi on utilise une notation (légèrement) différente. Il arrivera cependant que, par abus de notation, on utilise la même notation, même après modification de l'espace d'arrivée.

#### 2.2.3 Bijectivité

**Définition 18.** Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est dite *bijective* si elle est injective et surjective.

D'après les sections précédentes, une fonction $f$ est bijective si tout point de l'espace d'arrivée de $f$ possède au plus et au moins un antécédent par $f$. Cela revient à dire qu'il possède exactement un antécédent par $f$. On a donc :

**Proposition 19.** *Une application $f\colon A \longrightarrow B$ est bijective si et seulement si*

$$\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x).$$

**Méthodologie :** Pour montrer qu'une application $f\colon A \longrightarrow B$ est bijective, on pourra bien sûr montrer qu'elle est injective et indépendemment qu'elle est surjective. Une autre possibilité sera de montrer que, pour tout $y_0 \in B$, l'équation $f(x) = y_0$ possède une unique solution $x$ dans $A$.
Pour montrer qu'elle n'est pas bijective, on pourra ou bien exhiber une valeur $y_0 \in B$ telle que l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution, ou bien deux valeurs distinctes $x_1 \neq x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

*Exemple* 20. $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \frac{2x+1}{x-1} \end{array}$ est bijective. En effet, pour tout $y_0 \neq 2$, on a

$$\begin{array}{rcll} f(x) = y_0 & \Leftrightarrow & \frac{2x+1}{x-1} = y_0 & \\ & \Leftrightarrow & 2x+1 = y_0(x-1) & \text{car } x \neq 1 \\ & \Leftrightarrow & 1 + y_0 = x(y_0 - 2) & \\ & \Leftrightarrow & x = \frac{1+y_0}{y_0-2} & \text{car } y_0 \neq 2. \end{array}$$

Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, il y a donc exactement une solution et $f$ est bijective.

*Remarque* 21. En étudiant l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une application $f\colon A \longrightarrow B$, on se pose les questions suivantes :

| **Injectivité** | **Surjectivité** | **Bijectivité** |
|---|---|---|
| L'équation $f(x) = y_0$ peut-elle avoir plusieurs solutions ? | L'équation $f(x) = y_0$ a-t-elle toujours des solutions ? | L'équation $f(x) = y_0$ a-t-elle toujours une unique solution ? |

On s'intéresse donc toujours à la même équation, mais en se posant des questions différentes.

Nous avons vu qu'une application strictement monotone est injective et que, quitte à modifier l'espace d'arrivée, on peut la rendre surjective. Il s'ensuit le résultat suivant :

**Proposition 22.** *Une application strictement monotone est une bijection sur son image.*

Par ailleurs, il sera vu au second semestre, dans l'UE "Analyse I" que :
– une application dérivable sur un intervalle et dont la dérivé ne s'annule pas est strictement monotone ;
– une application dérivable est continue ;
– l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
De tout cela, on déduit que :

**Proposition 23.** *Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$ avec $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathfrak{Im}(f)$ est un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}\colon I \longrightarrow J$ est une bijection.*

*De plus, $J$ n'est déterminé que par les bords $a < b$ de $I$ dans le sens où*

$$J = \begin{cases} f'>0 & \begin{cases} I \text{ fermé en } a & \begin{cases} I \text{ fermé en } b & \big[f(a), f(b)\big] \\ I \text{ ouvert en } b & \big[f(a), \lim_{x\to b} f(x)\big[ \end{cases} \\ I \text{ ouvert en } a & \begin{cases} I \text{ fermé en } b & \big]\lim_{x\to a} f(x), f(b)\big] \\ I \text{ ouvert en } b & \big]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)\big[ \end{cases} \end{cases} \\ f'<0 & \begin{cases} I \text{ fermé en } a & \begin{cases} I \text{ fermé en } b & \big[f(b), f(a)\big] \\ I \text{ ouvert en } b & \big]\lim_{x\to b} f(x), f(a)\big] \end{cases} \\ I \text{ ouvert en } a & \begin{cases} I \text{ fermé en } b & \big[f(b), \lim_{x\to a} f(x)\big[ \\ I \text{ ouvert en } b & \big]\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to a} f(x)\big[ \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

*Remarque* 24. La conclusion de la proposition précédente reste vraie si $f'$ s'annule en un nombre fini de points mais sans jamais changer de signe.

*Exemple* 25. L'application $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ ne s'annulant qu'en 0. De plus, on a $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$. On en déduit que $f : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ est une bijection.

⚠ : le raisonnement ci-dessus ne fonctionne que sur $\mathbb{R}_+$ et, en effet, quand bien même elle est définie sur $\mathbb{R}$, $f$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$.

Nous terminons cette section par la remarque qu'il est toujours possible de modifier les espaces de départ et d'arrivée d'une application pour la transformer en une bijection sur son image. A titre d'exemple, la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est absolument pas une bijection, mais $\widetilde{f}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ l'est.

### 2.3 Application réciproque

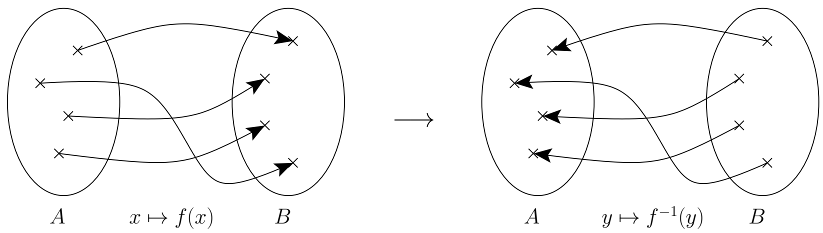
Dans cette section, nous considérons une application $f\colon A \longrightarrow B$ <u>bijective</u>.

**Notation 26.** On appelle *fonction réciproque* de $f$, notée $f^{-1}$, l'application

$$f^{-1}\colon \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & \begin{array}{c}\text{l'unique } x \in A \\ \text{tel que } y = f(x)\end{array} \end{array}.$$

On remarquera que la condition "f bijective" est essentielle si l'on veut que le $x$ tel que $y = f(x)$ soit bien définie de manière unique.

Graphiquement, une application réciproque est obtenu en renversant les flèches de la fonction initiale. En effet, le fait qu'une application soit bijective signifie que tout point de l'espace d'arrivée possède une unique flèche pointant dessus. En la remontant, on tombe sur l'unique antécédent du point en question :




Parcourir successivement une flèche dans les deux sens mène alors à la propriété suivante :

**Proposition 27.** *On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$, càd $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in A$, et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$, càd $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ pour tout $x \in B$.*

*Démonstration.* Par définition et pour tout $y_0 \in B$, $f^{-1}(y_0)$ est l'élément $x \in A$ tel que $f(x) = y_0$. On a donc $f\big(f^{-1}(y_0)\big) = y_0$.

De plus, pour $y_0 = f(x_0)$ avec $x_0 \in A$, on a également, par unicité de la solution de l'équation $f(x) = y_0$, que $f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0$. □

Réciproquement, on a :

**Proposition 28.** *Soit $g\colon A \longrightarrow B$ et $h\colon B \longrightarrow A$ deux applications tels que $h \circ g = \mathrm{Id}_A$ et $g \circ h = \mathrm{Id}_B$. Alors $g$ est bijective et $g^{-1} = h$.*

*Démonstration.* Montrons que $g$ est injective : soit $x, y \in A$ tels que $g(x) = g(y)$. On a alors $h\big(g(x)\big) = h\big(g(y)\big)$, càd $x = y$.

Montrons que $g$ est surjective : soit $y \in B$, on a $g\big(h(y)\big) = y$ donc $h(y)$ est un antécédent de $y$ par $g$.

L'application $g$ est donc bijective et le dernier argument montre même que $h(y)$ est bien l'unique antécédent de $y$ par $g$, càd $g^{-1}(y)$. □

*Remarque* 29. Une application réciproque est définie par la résolution d'équations, à savoir $f(x) = y_0$. Lorsqu'aucune solution explicite (c'est à dire décrite à l'aide de fonctions connues au préalable) de ces équations n'est connue, cela nécessite d'introduire une nouvelle fonction. C'est le cas de la fonction "racine carrée" définie comme la réciproque de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. A contrario, il peut arriver qu'une fonction réciproque puisse être décrite explicitement. Dans l'exemple 20, les calculs menés montre que $f^{-1}(y) = \frac{1+y}{y-2}$.

*Remarque* 30. L'application réciproque échange le rôle des espaces de départ et d'arrivée ainsi que les notions d'image et d'antécédent. De fait, dans le cas réel, le graphe de $f^{-1}$ est obtenu à partir de celui de $f$ en faisant la symétrie par rapport à la droite diagonale croissante d'équation $y = x$ car cette symétrie échange les axes des abscisses et des ordonnées tout en respectant le signe de chacun.

# 3 Fonctions usuelles

Dans cette partie, nous rappelons les propriétés élémentaires des fonctions usuelles. Contre tout esprit de rigueur, nous utiliserons au besoin des notions que nous n'introduirons qu'ultérieurement.

## 3.1 Logarithme et exponentielle

### 3.1.1 Logarithme

**Définition 31.** On appelle logarithme népérien l'unique fonction $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$.

**Proposition 32.** *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.*

*Démonstration.* On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(ax) - \ln(x) \end{array}$. Par différence de composition de fonctions dérivables, elle est dérivable avec $f'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0$. L'application $f$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et comme $f(1) = \ln(a) - \ln(1) = \ln(a)$ on a $f(x) = \ln(a)$, ce qui donne $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$. □

**Corollaire 33.** *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$. En particulier, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.*

*Démonstration.* On $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b}b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$. □

**Proposition 34.** *L'application* $\ln$ *est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.*

*Démonstration.* L'application ln est dérivable et sa dérivé est strictement positive, elle est donc strictement croissante et de fait bijective sur son image. De plus $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$ car elle est strictement croissante et l'on a $\ln(2) > \ln(1) = 0$ et donc $\ln(2^n) = n\ln(2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par ailleurs, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\lim_{y\to+\infty} \ln(y) = -\infty$, avec $y = \frac{1}{x}$. On en déduit que l'image de ln est $\mathbb{R}$ tout entier. □

**Graphe de ln :**

*DESSIN*

### 3.1.2 Exponentielle

**Définition 35.** L'application exponentielle est définie comme la réciproque $\exp := \ln^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ de l'application logarithme.

#### 3.1.3 Fonctions puissances

### 3.2 Fonctions trigonométriques directes

#### 3.2.1 Sinus

#### 3.2.2 Cosinus

#### 3.2.3 Tangente

#### 3.2.4 Formulaire

### 3.3 Fonctions trigonométriques réciproques

#### 3.3.1 Arcsinus

#### 3.3.2 Arccosinus

#### 3.3.3 Arctangente

#### 3.3.4 Formulaire

### 3.4 Fonctions hyperboliques directes

#### 3.4.1 Sinus hyperbolique

#### 3.4.2 Cosinus hyperbolique

#### 3.4.3 Tangente hyperbolique

#### 3.4.4 Formulaire

### 3.5 Fonctions hyperboliques réciproques

#### 3.5.1 Argsinus hyperbolique

#### 3.5.2 Argcosinus hyperbolique

#### 3.5.3 Argtangente hyperbolique

#### 3.5.4 Formulaire