

CUPGE - Introduction à l'analyse

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Mardi 8 octobre

L'épreuve dure deux heures. Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée. Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème indiqué n'est qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1. (4pts)

On considère l'affirmation suivante : “La demi-somme des carrés de deux nombres entiers quelconques est toujours supérieure au produit de ces deux nombres”.

1. Ecrire cette affirmation en langage mathématique.
2. Ecrire sa négation en langage mathématique et en langage courant.
3. Entre l'affirmation et sa négation, déterminer, en justifiant la réponse, celle qui est vraie.

Exercice 2. (7pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\tan(x)} = x^{2\sin(x)}$.
3. (a) Pour tout $a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ tels que $a + b \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, rappeler la formule de $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$
 (b) Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ tels que $a + b + c \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, exprimer $\tan(a + b + c)$ en fonction de $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(c)$.

Exercice 3. (4pts)

1. Donner la définition de l'injectivité et de la surjectivité d'une application.
2. On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+ , & g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ , & h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ z \mapsto |z| & x \mapsto \frac{1}{x^2+1} & n \mapsto n^2 - 1 \end{array} .$$

Pour chacune, dire, sans justification, si elle est injective et si elle est surjective.

Exercice 4. (5pts)

Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On pose $\alpha_x := \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1. Simplifier e^{α_x} .
2. Montrer que $\operatorname{ch}(\alpha_x) = \frac{1}{\cos(x)}$.
3. Montrer que $\operatorname{th}(\alpha_x) = \sin(x)$.