

CUPGE - Introduction à l'analyse

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Lundi 18 novembre 2013

L'épreuve dure deux heures. Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée. Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1. (5 points)

On considère l'application $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \arctan(x)$.

1. Etablir le tableau de variation de f .
2. Justifier que f est bijective.
3. Calculer $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.
4. Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} .
5. Calculer $(f^{-1})' \left(\frac{3 \ln(3) - 4\pi}{12} \right)$.

Exercice 2. (5 points)

1. On considère l'application $f: x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$.
 - (a) Donner, en les justifiant, les domaines de définition et de dérivabilité de f .
 - (b) Etablir le tableau de variation de f .
2. On considère l'application $g: x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
 - (a) Donner, en le justifiant, les domaines de définition et de dérivabilité de g .
 - (b) Calculer, lorsqu'elle existe, g' .
 - (c) Donner une formule simple de $\arcsin(2\alpha\sqrt{1-\alpha^2})$ pour tout $\alpha \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$.
 - (d) Qu'en est-il pour $\alpha \in \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$.

Exercice 3. (5 points)

Par exemple en intégrant par partie, donner une primitive de :

- | | |
|--|--|
| 1. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \arcsin(x)$ | 2. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)\operatorname{sh}(x)$ |
|--|--|

Exercice 4. (5 points)

Donner le domaine de définition et les primitives de chacune des fonctions suivantes :

1. $m(x) := x\sqrt{1-x}$ (on pourra poser $s = \sqrt{1-t}$);
2. $n(x) := \sqrt{4-x^2}$ (on pourra poser $s = \arcsin\left(\frac{t}{2}\right)$).