

CUPGE - Introduction à l'analyse

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

Mardi 7 janvier 2014

L'épreuve dure deux heures. Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée. Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1. (3 pts)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle que l'on précisera et donner une formule explicite pour f^{-1} .

Exercice 2. (6 pts)

Résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle $(1 - x^2)y'(x) + (1 + x^2)y(x) = e^x$.

Exercice 3. (5 pts)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, le but de cet exercice est de déterminer les primitives de la fonction $f_\theta : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x \cos(\theta) + 1}$.

1. Montrer que $x^2 + 2x \cos(\theta) + 1 = (x + \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$.
2. Déterminer I_θ , le domaine de définition maximale dans $\mathbb{R}$ de la fonction f_θ .
3. On suppose maintenant que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Z}$.
 - (a) Donner une primitive de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \frac{1}{x^2 + 1}$.
 - (b) Donner une primitive de la fonction f_θ .
4. On suppose maintenant que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Z}$. Donner toutes les primitives de la fonction f_θ .

Exercice 4. (6 pts)

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle : (E) $(1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - 4y + x = 1$.

On note (E₀) l'équation homogène associée.

1.
 - (a) Rappeler la définition de la fonction sh, son domaine de définition, son domaine de dérivabilité ainsi que sa fonction dérivée.
 - (b) Justifier que sh est une bijection de son domaine de définition vers son image que l'on précisera.
 - (c) On note arghsh la fonction réciproque de la fonction sh. Déterminer son domaine de dérivabilité ainsi que sa fonction dérivée.
2.
 - (a) Donner explicitement (E₀).
 - (b) Soit y une solution de (E₀), on note $z := y \circ \text{sh}$.
 - i. Justifier que z est deux fois dérivable.
 - ii. Exprimer y , y' et y'' à l'aide de la fonction z et de ses dérivées.
 - iii. En déduire une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants vérifiée par z .
 - (c) Résoudre (E₀).
3. Résoudre (E).

Exercice 5. (3 pts)

1. Donner la définition de la convergence d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un nombre réel λ .
2. Prouver que si les suites réelles $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v := (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les nombres réels λ et μ , alors la suite réelle $u + v := (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le nombre réel $\lambda + \mu$.