Aix-Marseille Université 2013-2014

Analyse 1

DEVOIR DE CONTRÔLE CONTINU 1

Vendredi 14 février 2014

Durée : deux heures. Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

On justifiera soigneusement les réponses.

Exercice 1

1. Donner la définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
2. Donner la définition d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.
3. Montrer, en précisant N_ε qui intervient dans cette définition, que la suite $\left(\frac{1-2\ln(n)}{1+\ln(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel que vous déterminerez.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2(-1)^n$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
2. Est-elle croissante ?
3. Est-elle une suite géométrique ?
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 \geqslant 1, \qquad \text{et pour } n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}.$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Exprimer v_n en fonction de v_0 et n.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de v_0 et n.
4. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = \cos(n)$.

1. Le but de cette question est de montrer que la suite (a_n) ne converge pas. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que la suite (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
   (a) A l'aide des formules trigonométriques, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n-1} + a_{n+1}$ en fonction de a_n et en déduire la valeur de ℓ.
   (b) A l'aide des formules trigonométriques, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{2n} en fonction de a_n et en déduire une formule satisfaite par ℓ.
   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
2. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.