Aix-Marseille Université 2013-2014

Analyse 1

PARTIEL 2 DU VENDREDI 21 MARS 2014

Exercice 1

1. Déterminer, si elle existe la limite en 0 de la fonction
$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$
2. Pour deux entiers $n \geq 0$ et $m \geq 0$, déterminer, si elle existe la limite en 0 de la fonction
$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$
On discutera suivant les valeurs de m et n.

Exercice 2 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$
La fonction f se prolonge-t-elle par continuité en -1 et en $+1$?

Exercice 3

1. Soient $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f admette 0 comme limite en 0 et g soit bornée.
   (a) Donner la définition d'une fonction ayant 0 comme limite en 0.
   (b) Donner la définition d'une fonction bornée.
   (c) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $h(x) = f(x)g(x)$ admet 0 comme limite en 0.
2. (a) Donner la définition d'une fonction continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, puis celle d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_1(x) := \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $h_1(0) = 0$ est-elle continue ?
   (c) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et par $h_2(0) = 0$ est-elle continue ?

Exercice 4 Montrer que le polynôme $P(x) = x^{2014} + 5x^{17} - 1$ admet une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 5 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Soit $a > 0$. Quelle forme a l'ensemble image $f([0, a])$?
2. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Démontrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.
3. f atteint-elle nécessairement ses bornes ?