Aix-Marseille Université — Licences de Mathématiques et d'Informatique

Semestre 2 — 2013-2014

Analyse 1

Planche 1 : Suites réelles

1 Suites numériques - Propriétés - Suites monotones

Exercice 1. Soient les suites définies par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

1. Vérifier qu'elles sont bornées.

2. Montrer que leur quotient n'est pas borné.

Exercice 2. ♣ Ecrire avec les quantificateurs la définition d'une suite divergente.

Exercice 3. Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 4. ♣ Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 5. ♣ Montrer que si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme a et de raison r, alors $u_n = a + nr,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. ♣ Montrer que si (u_n) est une suite géométrique de premier terme a et de raison r, alors $u_n = ar^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme a et de raison $r \neq 1$. On suppose que a et r sont strictement positifs.

1. Montrer que $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $\big(\ln(u_n)\big)$ est une suite arithmétique de premier terme $\ln(u_n)$ et de raison $\ln(a)$.

Exercice 8. ♣ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Exercice 9.

1. Ecrire avec les quantificateurs que la suite (u_n) vérifie $\lim u_n = +\infty$.

2. En déduire que si (u_n) est une suite réelle qui tend vers $+\infty$ et (v_n) est une suite bornée, alors leur somme est une suite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 10. Montrer que si une suite (u_n) est convergente alors la suite $(|u_n|)$ est convergente. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11. Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Exercice 12. ♣ Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ en appliquant la définition de la convergence et en précisant N_ε qui intervient dans cette définition.

Exercice 13. Les suites suivantes, sont-elles monotones ? bornées ? convergentes ?

$$(i)\ a_n = n^{(-1)^n}, \quad (ii)\ b_n = \cos\frac{n\pi}{2}, \quad (iii)\ c_n = \sin\frac{n\pi}{2}, \quad (iv)\ d_n = \cos\frac{\pi}{n},$$

$$(v)\ e_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2-3}, \quad (vi)\ f_n = \frac{n}{2^n}, \quad (vii)\ g_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (viii)\ h_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 14. ♣ A partir de la définition de la limite d'une suite, démontrer les égalités suivantes :

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2, \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \ln(\ln n) = +\infty.$$

Exercice 15. Les suites suivantes sont-elles convergentes ?

$$(i)\ a_n = (-1)^n n, \quad (ii)\ b_n = 1 + \frac{n}{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (iii)\ c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}.$$

Exercice 16.

1. Montrer que si la suite (a_n) est bornée et si la suite (b_n) vérifie $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

2. Calculer les limites suivantes :

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\sin(3n+1), \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^3+1}\cos(n!), \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} (\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}).$$

Exercice 17.

1. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |l|$.

2. Montrer que si $a_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Exercice 18. ♣

1. Soit (a_n) une suite à termes non nuls et telle que $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$. Montrer que si $q < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Calculer les limites des suites suivantes :

$$(i)\ a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (ii)\ b_n = \frac{2^n n!}{n^n}, \quad (iii)\ c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Exercice 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots \frac{n}{n^2+n}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{\sin(1)}{n^2} + \frac{\sin(2)}{n^2} + \frac{\sin(3)}{n^2} + \ldots \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

En encadrant u_n, démontrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 21. [La constante d'Apéry]

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Déterminer la monotonie de la suite (u_n)
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
3. Justifier que la suite (u_n) converge. Que peut-on dire de sa limite ?

Exercice 22. ♣ Soient (u_n) et (v_n) les suites définies tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
3. En calculant u_{10} et v_{10} donner un encadrement de la limite commune de ces deux suites.

2 Calculs de limites

Exercice 23. ♣ Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 24. ♣ Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \ldots\ ;\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\ ;\ \ldots$
2. $2/1\,;\ 4/3\,;\ 6/5\,;\ \ldots;\ 2n/(2n-1)\,;\ \ldots$
3. $0{,}23\ ;\ 0{,}233\ ;\ \ldots\ ;\ 0{,}233\cdots3\ ;\ \ldots$
4. $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$
5. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right]$
7. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $\bigl(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\bigr)$ puis $\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2\sqrt{2}}\ ;\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ ;\ \ldots$
10. $\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\bigl(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\bigr)$
12. $\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
13. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Exercice 25. Calculer les limites suivantes :

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2},\quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+1)^2+(n-1)^2},\quad (iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1},\quad (iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+\cos n}{3n+\sin n},$$

$$(v)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 3^{n+1}+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^{n+2}},\quad (vi)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2},\quad (vii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2},$$

$$(viii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}},\quad (ix)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}.$$

Exercice 26. Calculer les limites des suites suivantes :

$$(i)\ a_n=n-\sqrt{n^2+5n},\quad (ii)\ b_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n},\quad (iii)\ c_n=\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt{n^4-n^2},$$

$$(iv)\ d_n=\frac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+2}-n},\quad (v)\ e_n=\frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}},\quad (vi)\ f_n=\sqrt[3]{n(n+1)^2}-\sqrt[3]{n(n-1)^2},$$

$$(vii)\ g_n=\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n}-n},\quad (viii)\ h_n=n(\sqrt[3]{n^3+n}-n).$$

Exercice 27. Calculer les limites des suites suivantes en appliquant le théorème des gendarmes :

$$(i)\ a_n=\sqrt[n]{2\cdot 3^n+4\cdot 7^n},\quad (ii)\ b_n=\sqrt[n]{3n+\sin n},\quad (iii)\ c_n=\sqrt[n]{2n+\frac{(-1)^n}{n}},\quad (iv)\ d_n=\sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}},$$

$$(v)\ e_n=\sqrt[n]{2n^3-3n^2+15},\quad (vi)\ f_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}},\quad (vii)\ g_n=\sqrt[n]{1^k+2^k+\ldots+n^k}.$$

3 Suites extraites. Valeurs d'adhérence. Limite sup, limite inf.

Exercice 28. ♣ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :

1. Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l.
2. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
3. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 29. Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\cos\dfrac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+q}=u_n$.

2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite u_n n'a pas de limite.

Exercice 30. ♣ [Calcul des valeurs d'adhérence d'une suite]

1. Calculer les valeurs d'adhérence, la limite inf et la limite sup de la suite (u_n) définie par
   (a) $u_n=5+\frac{\sqrt{n}\sin(n)}{2n^2}+(-1)^{n^2+1}$.
   (b) $u_n=(-1)^n(1+\frac{1}{n})$.
   (c) $u_n=\cos(\frac{n\pi}{3})$. Comparer l'ensemble des termes (valeurs) de cette suite avec l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.
   (d) $u_n=\frac{7n}{11}-E(\frac{7n}{11})$. Comparer l'ensemble des termes (valeurs) de cette suite avec l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

2. Introduire la notion de valeur d'adhérence pour une suite dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite complexe (z_n) définie par
   (a) $z_n = i^n + \left(\frac{1+i}{2}\right)^n + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3n+1}$
   (b) $z_n = (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^n + n(-1+i^n) + \frac{1}{n^2}$.

Exercice 31. Soit (u_n) est une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée. Montrer que (u_n) est majorée (donc convergente).

Exercice 32. ♣ En utilisant des suites extraites, établir la divergence des suites suivantes : $u_n = n^{-1+(-1)^n}$, $v_n = \cos(\pi\sqrt{n})$, $w_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$

Exercice 33. ♣ Montrer qu'une suite de nombres réels (u_n) est non majorée si et seulement si (u_n) admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 34. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 35. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = \frac{n+1}{n}\cos(\frac{n\pi}{2})$ et $v_n = \frac{n-1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})$. Calculer les limites supérieures et inférieures des suites (u_n), (v_n) et $(u_n + v_n)$.

Exercice 36. Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ et

$$v_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1+(-1)^p}{p}\right)^p & \text{si} \quad n = 2p \\ (1+\frac{1}{p})^p & \text{si} \quad n = 2p+1 \ . \end{cases}$$

Exercice 37. Montrer que pour toutes suites réelles bornées (u_n) et (v_n) on a

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n + v_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(u_n) + \limsup_{n\to\infty}(v_n) \ .$$

Est-ce que cette inégalité reste vraie pour les suites non-bornées ? Attention au cas $\limsup_{n\to\infty}(u_n) = \infty$, $\limsup_{n\to\infty}(v_n) = -\infty$.

Exercice 38.
1. Soit (u_n) une suite convergente de $\mathbb{R}$ et soit l sa limite.
   (a) Montrer que si $\{n \in \mathbb{N} | \ u_n < l\}$ est infini, alors (u_n) admet une suite extraite strictement croissante.
   (b) Montrer que si $\{n \in \mathbb{N} | \ u_n > l\}$ est infini, alors (u_n) admet une suite extraite strictement décroissante.
   (c) Que peut-on dire de la suite (u_n) si les deux ensembles $\{n \in \mathbb{N} | \ u_n < l\}$ et $\{n \in \mathbb{N} | \ u_n > l\}$ sont finis ?
2. Montrer que toute suite dans $\mathbb{R}$ admet une suite extraite monotone.

3. Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Montrer que toute valeur d'adhérence de (u_n) est la limite d'une suite extraite monotone.

Exercice 39. Déterminer les limites inférieures et supérieures de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_1 = 0$, $u_{2n} = \frac{u_{2n-1}}{2}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2} + u_{2n}$.

Exercice 40. [L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée]

Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite convergente dont tous les termes sont des valeurs d'adhérence de (u_n). Montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n$ est aussi une valeur d'adhérence de (u_n).

Exercice 41. Soient (u_n), (v_n) deux suites dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Notons par A (respectivement B) l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n), respectivement (v_n). En utilisant les suites (u_n), (v_n) construire une suite (w_n) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence soit $A \cup B$.

Exercice 42. [Suites bornées denses dans un intervalle]

Soit $a \in]0, \infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $\varphi_a(x) := \min\{x - ka|\ k \in \mathbb{Z},\ ka \leqslant x\} \in [0, a[$.

1. Remarquer que pour $\varphi_1(x) = x - E(x)$, puis $\varphi_a(x) = a(\frac{x}{a} - E(\frac{x}{a}))$.
2. Supposons que $a \in \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que l'ensemble V des valeurs de l'application $\mathbb{N} \to [0, a[$ définie par $n \mapsto \varphi_a(n)$ est fini. Préciser le cardinal de cet ensemble.
   (b) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\varphi_a(n))$ est l'ensemble fini V.
   (c) Donner un exemple de suite bornée dans $\mathbb{R}$ qui a exactement 2014 valeurs d'adhérence.
3. Supposons que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que l'application $\mathbb{N} \to [0, a[$ définie par $n \mapsto \varphi_a(n)$ est injective.
   (b) Montrer que la suite $(\varphi_a(n))$ admet une suite extraite convergente dans $[0, a]$.
   (c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe m, $n \in \mathbb{N}$ tels que $0 < |\varphi_a(m) - \varphi_a(n)| < \varepsilon$.
   (d) l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\varphi_a(n))$ est $[0, a]$.
4. Préciser l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sin(n)$.
5. Préciser l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (v_n) définie par $v_n = \tan(n)$.

Exercice 43. [Suite bornée telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$]

1. Soit (u_n) une suite bornée de $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) coïncide avec l'intervalle $\left[\liminf\limits_{n\to\infty} u_n, \limsup\limits_{n\to\infty} u_n\right]$.
2. Donner un exemple d'une suite suite bornée *et divergente* (u_n) de $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

4 Suites récurrentes

Exercice 44. ♣ Soit la suite (u_n) définie par récurrence par : $u_0 > 2$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

1. Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite l ?
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire la nature de la suite (u_n) (convergente ou pas).

Exercice 45. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \arctan x$.

1. Montrer que f a un seul point fixe x_0 et préciser ce point.

2. Est-ce que f est une contraction ?
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite récurrente (u_n) dans $\mathbb{R}$ définie par $u_0 = x$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x_0.

Exercice 46. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et croissante.

1. Montrer que la suite récurrente définie par $u_0 = b$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, est décroissante.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 47. [Méthode de Héron]
Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.
1. Montrer que

$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$

2. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$ montrer que

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$

6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 48. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sin(x)$.

1. Faites le graphe de f,
2. Montrer que $f([0, \pi]) = [0, \pi]$.
3. Préciser l'ensemble des points fixes de f.
4. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $x \in [2k\pi, (2k + 1)\pi]$ on a $x \leqslant f(x) \in [2k\pi, (2k + 1)\pi]$ et pour tout $x \in [(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi]$ on a $x \geqslant f(x) \in [(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi]$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite récurrente $(u_n(x))$ associée à f de terme initial $u_0(x) = x$ est convergente.
6. Étudier l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$F(x) := \lim_{n \to \infty} u_n(x) .$$

Exercice 49. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout entier $n \geqslant 0$ les relations $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres u_n et v_n sont positifs et inférieurs au $\max(a, b)$.

2. Établir une relation simple entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$, et en déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont une limite commune l.
4. Etudier la suite $(u_n + 2v_n)$ et en déduire la valeur de l.

Exercice 50. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $n \geqslant 0$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \ , \ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite l que l'on calculera en fonction de a et de b.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(a_n + b_n)} \ .$$

   En déduire que pour tout $n \geqslant 0$ on a $0 \leqslant (b_{n+1} - a_{n+1}) \leqslant \frac{(b_n - a_n)^2}{4a}$ et $(b_n - a_n) \leqslant 4a \left(\frac{b-a}{4a}\right)^{2^n}$.
3. Application : trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.
4. Pour $a_0 = 3$, $b_0 = 5$ calculer les valeurs exactes de a_2 et b_2 et en déduire un encadrement de $\sqrt{15}$ par deux rationnels.

Exercice 51. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{n+2} e^{u_n}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n \leqslant 1$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+2)}$, puis la convergence de (u_n).

Exercice 52. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}$. Démontrer par récurrence que (u_n) est positive et décroissante. Conclure...

Exercice 53. ♣ [Récurrences d'ordre 2]
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$ satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. *L'équation caractéristique* associée à cette relation de récurrence est $r^2 - ar - b = 0$.

1. Montrer que :
   (a) La suite (u_n) est déterminée par les deux premiers termes u_0, u_1.
   (b) Si l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2, alors le terme général de la suite (u_n) est donné par $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, où λ, μ sont des constantes réelles.
   (c) Si r_0 est une racine double de l'équation caractéristique, alors le terme général de la suite (u_n) est donné par $u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$, où λ, μ sont des constantes réelles.
   (d) Si l'équation caractéristique a deux racines complexes $r_1 = \rho e^{i\theta}$, $r_1 = \rho e^{-i\theta}$ alors le terme général de la suite (u_n) est donné par $u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$, où λ, μ sont des constantes réelles.
2. Dans chaque cas déterminer les constantes λ, μ en fonction de u_0, u_1. *Indication : Si l'équation caractéristique a deux racines complexes et $\rho = 1$, utiliser l'exercice 3.*
3. Dans chaque cas étudier la convergence de la suite (u_n).
4. Application : Soit (u_n) une suite de Fibonacci, donc une suite qui satisfait la relation récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Donner la formule du terme général en fonction des termes initiaux u_0, u_1. Pour quelles paires $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ la suite de Fibonacci associée est convergente ?

Exercice 54. On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Etudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?
2. On suppose de plus que $u_0 \leqslant 0,25$. Montrer que $u_n \in [0; 0,25]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que (u_n) est croissante. Conclure.
3. On suppose cette fois que $u_0 \in [0,25; 0,75]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Conclure.
4. On suppose cette fois que $u_0 > 0,75$. Montrer que (u_n) est croissante. Conclure.

Exercice 55. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[1, 3]$?
2. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
3. En déduire que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
4. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 56. ♣ [suite arithmético-géométrique]
Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la seule limite possible l de la suite (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - l$. Démontrer que (v_n) est géométrique. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 57. Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, supposée continue et monotone, et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. Application :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

3. On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. Application : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.
Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

5 Suites de Cauchy

Exercice 58. Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$ telle que la suite (v_n) de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$ est bornée. Montrer que (v_n) et (u_n) sont convergentes.

Exercice 59. Montrer en utilisant le critère de Cauchy que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ est divergente.

Exercice 60. On considère une suite de nombres réels (u_n) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k|u_n - u_{n-1}|$. Montrer à l'aide du critère de Cauchy que (u_n) est convergente lorsque $k \in [0, 1[$.

Exercice 61.

1. Démontrer par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} .$$
2. Montrer que la suite (u_n) donnée par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est une suite de Cauchy.

Exercice 62. Montrer, en utilisant la défintion, que

1. la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ n'est pas de Cauchy.
2. la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ est de Cauchy.

Exercice 63. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ à valeurs rationnelles converge vers x. En déduire que tout nombre réel (en particulier tout nombre irrationnel) est la limte d'une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Qu'est-ce qu'on peut dire de la suite (u_n) lorsque

1. x est un nombre décimal (donc un nombre possédant un développement décimal limité) ?
2. $x \in \mathbb{Q}$?

Exercice 64. Montrer que la suite (u_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2 + \frac{1}{k})^k}$$
est de Cauchy.

6 Exercices complémentaires

Exercice 65. Soit (u_n) une suite de nombres réels qui vérifie :
$$\forall n,\ p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \frac{n+p}{np}.$$
Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 66. Calculer, suivant les valeurs de x, la limite des suites (u_n), $u_n = (\cos(x))^n$, $x \in \mathbb{R}$, et (v_n), $v_n = \cos(n!\pi x)$, $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 67. Soit (u_n) une suite de nombres réels. Une telle suite possède la propriété P1 (resp. P2) s'il existe un indice h (resp. k) tel que $u_h = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (resp. $u_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
Montrer que si la suite (u_n) est convergente, elle possède au moins l'une des propriétés P1 ou P2.
Donner un exemple de suite convergente qui possède les deux propriétés P1 et P2.

Exercice 68. ♣ [Le nombre e comme limite d'une suite]
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dans $\mathbb{R}$ définie par $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Montrer que :

1. $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]$.
2. La suite (x_n) est croissante,
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x_n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
4. La suite (x_n) est bornée par 3.
5. La suite (x_n) est convergente. Soit ℓ la limite de cette suite.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\ell \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
7. La suite (s_n) de terme général $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente et $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.
8. $\ell = \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$ au sens des limites de fonctions.
9. $\ell = e$.
10. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 69. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. Montrer que (u_n) converge. *Indication : On pourra commencer par étudier la monotonie de la suite de terme général* $v_n := \max(u_{n+1}, u_n)$.

Exercice 70. Soit (u_n) une suite bornée telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1})$. Montrer que la suite (u_n) converge. *Indication : étudier d'abord la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$.*

Exercice 71. [Théorème de Cesaro]

1. Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, elle converge aussi en moyenne arithmétique vers ℓ, c'est-à-dire que la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge aussi vers ℓ. *Indication : Traiter d'abord le cas $\ell = 0$ puis s'y ramener en considérant la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - \ell$.*
2. La réciproque est-elle vraie ? Donner un exemple.
3. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (où $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$), alors la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ a la même propriété.
4. Soit (u_n) une suite monotone. Montrer que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge vers ℓ.

Exercice 72. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ qui converge vers ℓ. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1u_2\cdots u_n} = \ell$. *Indication : Réduire le problème au théorème de Cesaro en utilisant la fonction* ln. *Attention au cas* $\ell = 0$. Est-ce que le résultat reste vrai si $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$?

Exercice 73. [Théorème des intervalles emboités]
Soit (I_n) une suite d'intervalles fermés $I_n = [a_n, b_n]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_{n+1} \subset I_n$.

1. Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
2. Quelle condition doivent satisfaire les suites (a_n), (b_n) pour que l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ ait un seul élément ?
3. Est-ce que le théorème similaire est vrai dans $\mathbb{Q}$ (donc si on remplace les intervalles fermés de nombres réels par des intervalles fermés de nombres rationnels) ?