Aix-Marseille Université 2013-2014

Analyse 1

EXAMEN DU LUNDI 5 MAI 2014

Durée : deux heures. Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Exercice 1

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On propose de démontrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera S sa limite.

1. Donner la définition d'une suite de nombres réelles bornée.
2. Démontrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
3. En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
4. Démontrer alors que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner un majorant de sa limite.

Exercice 2

1. Démontrer que si une fonction f ; définie sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$; admet une limite en a ; alors cette limite est unique.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner la définition de : "f est dérivable en x_0". Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ par
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
3. La fonction g est-elle continue en 0 (à droite) (justifier votre réponse).

Exercice 3

Dans cet exercice, on souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = g(u_n),$$

où g est la fonction définie dans l'exercice 2.

1. Étudier les variations de la fonction g. En particulier, on montrera que la restriction de la fonction g à l'intervalle $]1, +\infty[$ admet un minimum global en e (où e est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$).
2. (a) Montrer, par récurrence sur n, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e.$$
   (b) Démontrer que pour tout $x > e$, $g(x) < x$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Tracer sur une même figure le graphe de g et la droite $y = x$, puis dessiner les premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 4

1. Énoncer l'inégalité des accroissements finis et l'illustrer par une figure.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Donner la formule de Taylor Young de f en a.
2. Vérifier que le développement à l'ordre 3 de $\exp$ est : $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\theta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \theta(x) = 0$.
3. Établir le développement à l'ordre 3 de $\dfrac{1}{1-x}$.
4. En déduire la limite en 0 de $\dfrac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^3}$.