Université Aix-Marseille	2013–2014

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ N^{o} 1

Vendredi 4 octobre 2013

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices et téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barême indiqué n'est qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1 et 2, l'autre les exercices 3 et 4.

Exercice 1. (3pts)

On considère l'affirmation suivante : "On peut trouver un nombre réel strictement positif dont le cosinus est inférieur ou égal aux sinus de tous les autres réels (positifs ou négatifs)".

1. Ecrire cette affirmation en langage mathématique.
2. Ecrire sa négation en langage mathématique et en langage courant.
3. Entre l'affirmation et sa négation, déterminer, en justifiant la réponse, celle qui est vraie.

Exercice 2. (4pts)

1. Rappeler les formules qui lient sinus et cosinus des angles x et $\frac{\pi}{2} - x$.
2. Rappeler les ensembles de définition et de valeurs des fonctions arccosinus et arcsinus.
3. Exprimer en fonction de x l'expression $\arccos(\sin x)$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
4. Donner les valeurs de $\arccos\big(\sin \frac{3\pi}{4}\big)$, $\arccos\big(\sin(-\frac{5\pi}{6})\big)$, $\arccos\big(\sin \frac{8\pi}{3}\big)$.
5. Simplifier l'expression $\arccos(\sin x)$ pour $x \in [-\pi, 2\pi]$ (on pourra décomposer le problème sur plusieurs intervalles).

Exercice 3. (7pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(2x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(x) = \cos(x)$.
3. Après avoir donné le domaine de définition maximale dans $\mathbb{R}$ de l'expression $\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi x}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x^2 - x) = \sin(x^2 + x)$.
4. Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 4. (6pts)

1. Donner la définition de l'injectivité et de la surjectivité d'une application.
2. Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & [0, +\infty[\\ z & \mapsto & |z| \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & ne^{i\frac{n\pi}{3}} \end{array}, \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{ch}(x) - 2\mathrm{sh}(x) \end{array}.$$

3. Pour celles qui sont bijectives, déterminer une expression explicite pour la fonction réciproque.