Parcours PEIP
Introduction à l'analyse

PLANCHE 3 - DÉRIVÉES, PRIMITIVES

Dérivées.

Exercice 1. S'entraîner à dériver des fonctions (voir planche 3bis).

Exercice 2. En dérivant, montrez les égalités suivantes :

1. $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x)\frac{\pi}{2}$ pour tout $x \neq 0$.
2. $2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in]0, 1[$.
3. $x.\text{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = |x| \ln|x|$ pour tout $x \neq 0$.
4. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2 \arcsin(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Exercice 3.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{sh } x + \ln(\text{ch } x)$ est une bijection. Que vaut $f^{-1}(0)$?
2. Calculer la dérivée de sa fonction réciproque f^{-1} en 0.

Primitives.

Exercice 4. Calculer, par des changements de variables, les primitives suivantes :

1. $\int \cos(3x)dx$;	2. $\int e^{-x}dx$;	3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$;
4. $\int \frac{dx}{5x-2}$;	5. $\int \frac{dx}{5+3x^2}$;	6. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$;
7. $\int \frac{3dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;	8. $\int \cos^4(x) \sin(x)dx$.	

Exercice 5. Calculer, à l'aide des changements de variables proposés, les primitives suivantes :

1. $\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx$, avec $x^3 + 1 = t^2$;	2. $\int \frac{1}{x(x^3+1)^2} dx$, avec $t = x^3 + 1$;
3. $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1} dx$, avec $t = e^x$;	4. $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x} dx$, avec $t = \cos x$;
5. $\int \frac{1}{\cos x + \cos 3x} dx$, avec $t = \sin x$;	6. $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$, avec $t = \tan \frac{x}{2}$;
7. $\int \frac{1}{(2+\cos x)^2} dx$, avec $t = \tan \frac{t}{2}$;	8. $\int (x^2 + 4)^{-\frac{5}{2}} dx$ avec $t = \text{argsh} \frac{x}{2}$;
9. $\int (4 - x^2)^{-\frac{5}{2}} dx$, avec $t = \arcsin \frac{x}{2}$;	10. $\int (x^2 - 4)^{-\frac{5}{2}} dx$, avec $t = \text{argch} \frac{x}{2}$.

Exercice 6. Calculer, en intégrant par parties, les primitives suivantes :

1. $\int x \cos(x)dx$	2. $\int x^2 e^x dx$	3. $\int \ln(x)dx$
4. $\int x^2 \ln(x)dx$	5. $\int e^x \cos(x)dx$	6. $\int x \arctan(x)dx$
7. $\int \arcsin^2(x)dx$	8. $\int \sin(x)\text{sh}(x)dx$	

Exercice 7.

1. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{1+X^4}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'expression d'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$.

Exercice 8.

1. Déterminer la partie entière de la fraction rationnelle $F = \frac{X^5 + 1}{X^2 + 3X + 2}$.
2. Décomposer F en éléments simples.
3. En déduire l'expression d'une primitive de $x \mapsto \frac{x^5 + 1}{x^2 + 3x + 2}$.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la primitive

$$f_n = \int x (\ln x)^n dx.$$

1. Calculer f_0 et f_1 .
2. Trouver une relation entre f_{n+1} et f_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner l'expression de f_n à l'aide de fonctions usuelles.