

Parcours CUPGE
Introduction à l'analyse

MEMENTO
FONCTIONS USUELLES

1 Exponentielle et dérivés

1.1 Logarithme

Definition

On appelle logarithme (népérien) l'unique fonction $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$.

On appelle logarithme décimale l'unique fonction $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(10) = 1$.

 : dans certains livres, la notation $\log$ pourra être utilisé pour le logarithme népérien et Log pour le logarithme décimal. Vérifiez toujours la définition.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}_+^*$

Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{x}$

Primitives : $x \mapsto x(\ln(x) - 1) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

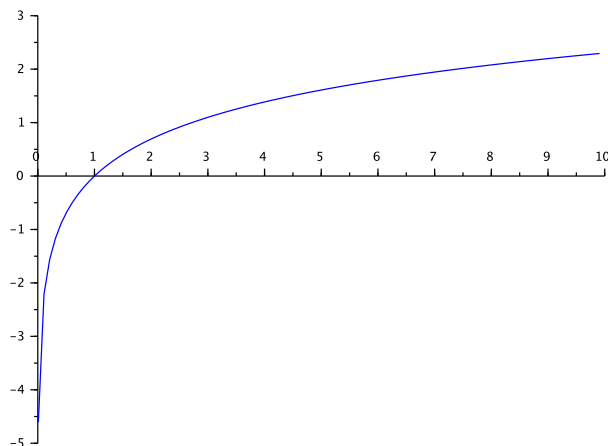
Limites

- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0$ pour tout $\alpha > 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ pour tout $\alpha > 0$

Valeurs particulières

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$ avec e la constante de Néper

Graphe



Propriétés

- $\ln$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$

1.2 Exponentielle**Définition**

L'application exponentielle est définie comme la réciproque $\exp := \ln^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de l'application logarithme.

Selon les livres, on pourra lui trouver, de manière équivalente, les définitions suivantes :

- l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est égale à elle-même et valant 1 en 0 ;
- l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ transformant une somme en produit et valant la constante d'Euler en 1 ;
- la fonction sur $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Du fait de l'égalité entre ces deux fonctions, on note souvent e^x , avec e la constante de Néper, pour $\exp(x)$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivé : $x \mapsto \exp(x)$

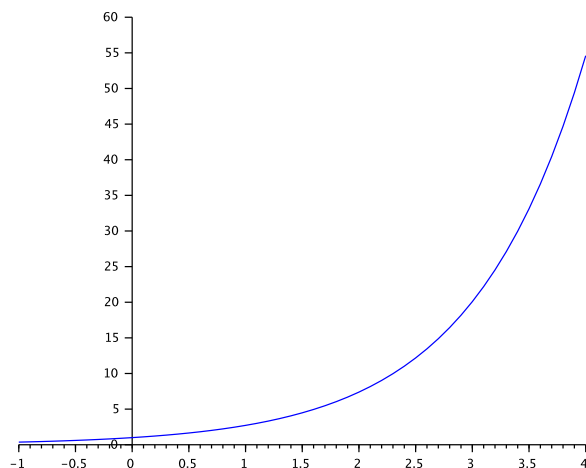
Primitives : $x \mapsto \exp(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Limites

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha \exp(x) = 0$ pour tout $\alpha > 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = \infty$ pour tout $\alpha > 0$

Valeurs particulières

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e$ avec e la constante de Néper

Graphe

Propriétés

- $\exp$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$
- $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$
- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$
- $\exp(\ln(a)) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\ln(\exp(a)) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

1.3 Fonctions puissances**Definition**

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $b \in \mathbb{R}$, on note $a^b := e^{b \ln(a)}$.

Si $b \in \mathbb{N}^*$, il s'agit de la mise en puissance usuelle, à ce détail près que cette dernière est définie pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Si b est de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, il s'agit de la racine $n^{\text{ième}}$.

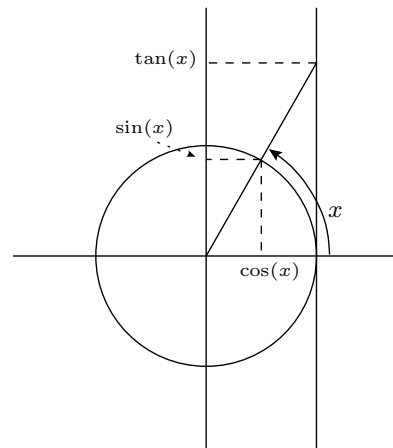
Pour tout étude analytique, on se ramènera à l'étude des fonctions logarithme et exponentielles en utilisant la forme $e^{b \ln(a)}$.

Propriétés

- $a^{b+c} = a^b a^c$ pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$
- $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$
- $a^{bc} = (a^b)^c$ pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

2 Fonctions trigonométriques directes**2.1 Sinus****Definition**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\sin(x)$ l'ordonnée du point obtenu après avoir parcouru une distance $|x|$ sur le cercle unité en partant de $(1,0)$ et en suivant le sens trigonométrique si $x \geq 0$ et le sens des aiguilles d'une montre sinon. Cela correspond également au point M du cercle unité tel que les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OM}$ forment un angle égale à x radians modulo 2π , avec O l'origine du plan et A le point de coordonnées $(1,0)$.



Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivé : $x \mapsto \cos(x)$

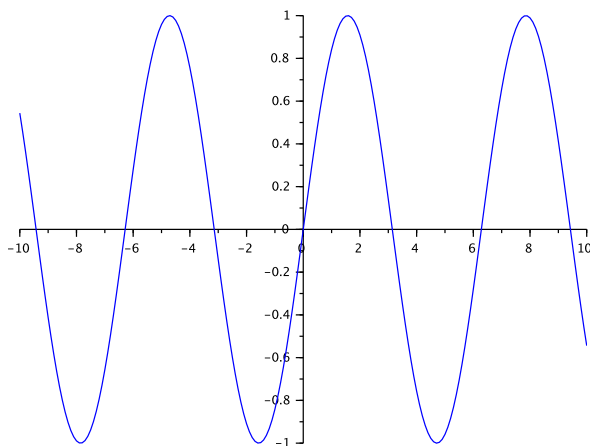
Primitives : $x \mapsto -\cos(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Limites

$$— \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Valeurs particulières

$$\begin{aligned} — \sin(0) &= 0 \\ — \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \\ — \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ — \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ — \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Graphe**Propriétés**

- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2.2 Cosinus**Définition**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\cos(x)$ l'abscisse du point obtenu après avoir parcouru une distance $|x|$ sur le cercle unité en partant de $(1, 0)$ et en suivant le sens trigonométrique si $x \geq 0$ et le sens des aiguilles d'une montre sinon. Cela correspond également au point M du cercle unité tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ forment un angle égale à x radians modulo 2π , avec O l'origine du plan et A le point de coordonnées $(1, 0)$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivé : $x \mapsto -\sin(x)$

Primitives : $x \mapsto \sin(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

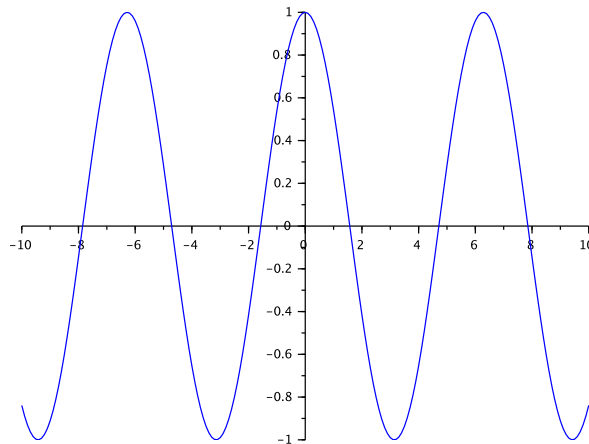
Limites

$$— \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Valeurs particulières

$$\begin{aligned} &— \cos(0) = 1 \\ &— \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &— \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &— \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ &— \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Graphe**Propriétés**

$$\begin{aligned} &— \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &— \cos(-x) = \cos(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &— \cos(\pi - x) = -\cos(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.3 Tangente**Définition**

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on note $\tan(x)$ l'abscisse de l'intersection de la droite verticale passant par $(1, 0)$ et la droite passant par l'origine et le point obtenu après avoir parcouru une distance $|x|$ sur le cercle unité en partant de $(1, 0)$ et en suivant le sens trigonométrique si $x \geq 0$ et le sens des aiguilles d'une montre sinon. Cela correspond également au point M du cercle unité tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ forment un angle égale à x radians modulo 2π , avec O l'origine du plan et A le point de coordonnées $(1, 0)$.

Une autre définition équivalente est de poser $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Dérivé : $x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

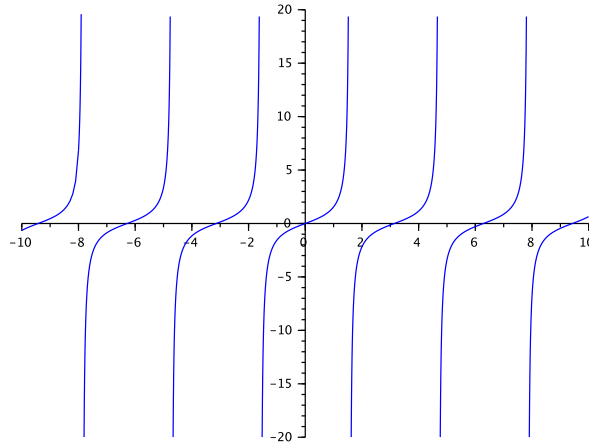
Primitives : $x \mapsto -\log(\cos(x)) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Valeurs particulières

$$\begin{aligned} &— \tan(0) = 0 \\ &— \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &— \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ &— \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Limites

$$— \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

Graphes**Propriétés**

- $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2.4 Formulaire

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, avec $t = \tan(\frac{x}{2})$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b, a + b \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$ et $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$ et $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

3 Fonctions trigonométriques réciproques**3.1 Arcsinus****Définition**

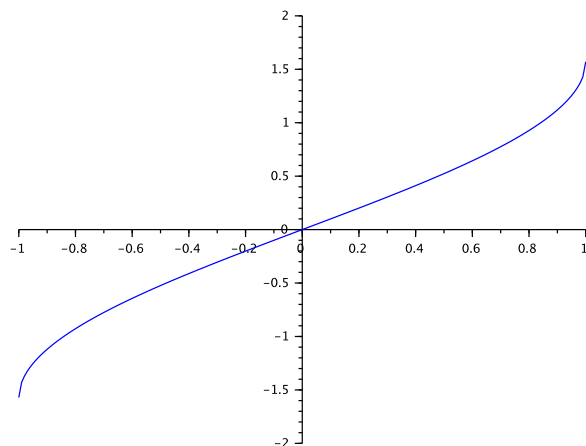
On appelle $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la fonction réciproque de la fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $] -1, 1[$

Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Primitives : $x \mapsto x.\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graph**Propriétés**

- $\arcsin$ est bijective de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$
- $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$
- $\arcsin(\sin(x)) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ (2k+1)\pi - x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$

3.2 Arccosinus**Définition**

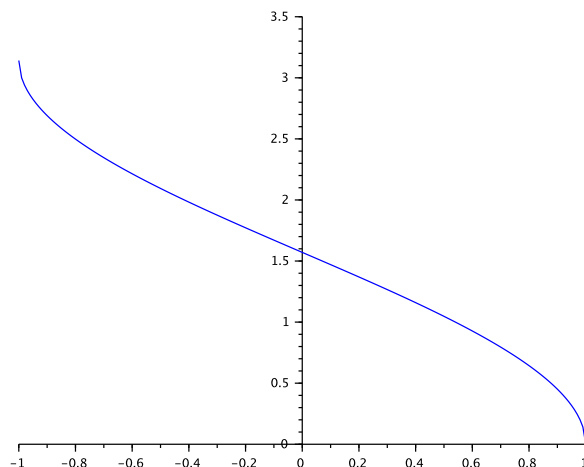
On appelle $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ la fonction réciproque de la fonction $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $] -1, 1[$

Dérivé : $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Primitives : $x \mapsto x.\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graph**Propriétés**

- $\arccos$ est bijective de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$
- $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$
- $\arccos(\cos(x)) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{si } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi - x & \text{si } x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi] \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$
- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$

3.3 Arctangente**Definition**

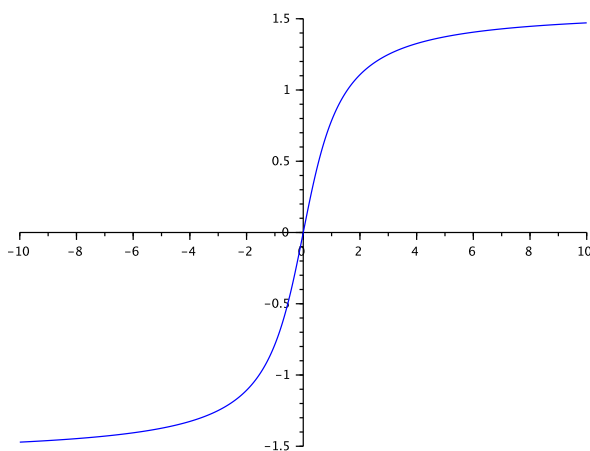
On appelle $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la fonction réciproque de la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

Primitives : $x \mapsto x \cdot \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graph**Propriétés**

- $\arctan$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\arctan(\tan(x)) = x - k\pi$ si $x \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \text{signe}(x) \cdot \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

4 Fonctions hyperboliques directes

4.1 Sinus hyperbolique

Définition

On appelle sinus hyperbolique la fonction $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\text{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Elle est parfois également notée $\sinh$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivé : $x \mapsto \text{ch}(x)$

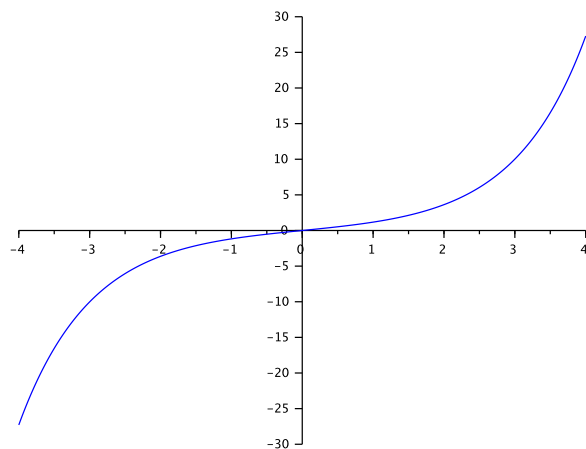
Primitives : $x \mapsto \text{ch}(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Limites

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sh}(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{x} = 1$

Valeurs particulières

- $\text{sh}(0) = 0$

Graph**Propriétés**

- sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $\text{sh}(-a) = -\text{sh}(a)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$

4.2 Cosinus hyperbolique**Définition**

On appelle cosinus hyperbolique la fonction $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\text{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Elle est parfois également notée $\cosh$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivé : $x \mapsto \text{sh}(x)$

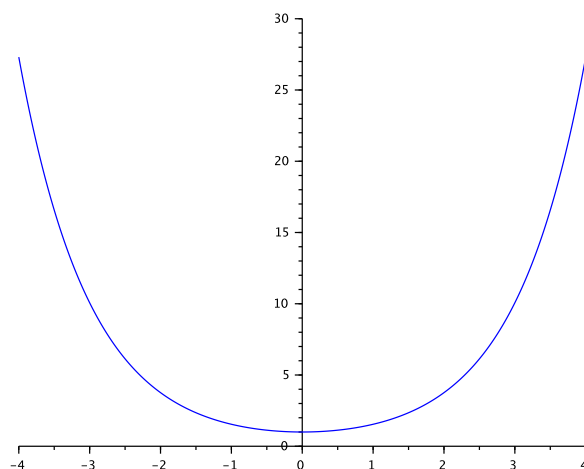
Primitives : $x \mapsto \text{sh}(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Limites

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sh}(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

Valeurs particulières

- $\text{ch}(0) = 1$

Graph**Propriétés**

- ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$
- $\text{ch}(-a) = \text{ch}(a)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$

4.3 Tangente hyperbolique**Définition**

On appelle tangente hyperbolique la fonction $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\text{th}(x) := \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Elle est parfois également notée $\tanh$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivé : $x \mapsto 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$

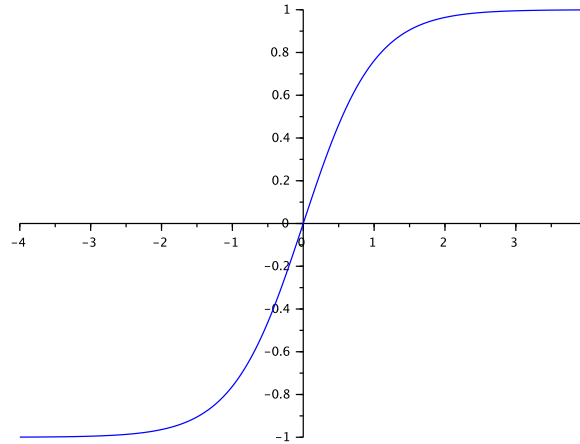
Primitives : $x \mapsto \ln(\text{ch}(x)) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Limites

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sh}(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{th}(x)}{x} = 1$

Valeurs particulières

- $\text{th}(0) = 0$

Graph**Propriétés**

- th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$
- $\text{th}(-a) = -\text{th}(a)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$

4.4 Formulaire

- $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ et $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
- $\text{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}$, $\text{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $\text{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $t = \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$
- $\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{ch}(a)\text{sh}(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{th}(a+b) = \frac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a)\text{th}(b)}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) = 2\text{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\text{sh}^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\text{th}(2x) = \frac{2\text{th}(x)}{1 + \text{th}^2(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\text{ch}(a) + \text{ch}(b) = 2\text{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\text{ch}(a) - \text{ch}(b) = 2\text{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{sh}(a) + \text{sh}(b) = 2\text{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\text{sh}(a) - \text{sh}(b) = 2\text{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

5 Fonctions hyperboliques réciproques**5.1 Argsinus hyperbolique****Définition**

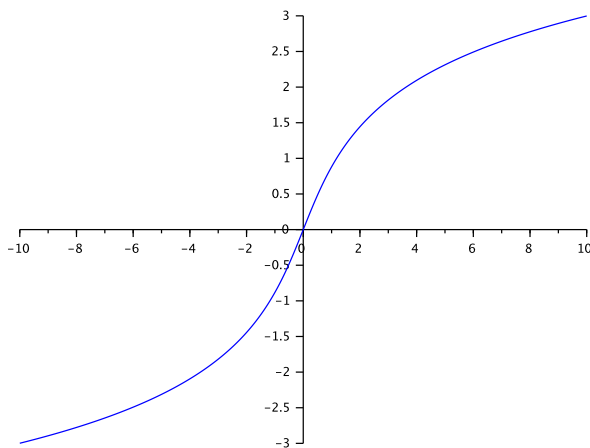
On appelle $\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la fonction sh .

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Primitives : $x \mapsto x.\operatorname{argsh}(x) - \sqrt{x^2+1} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphé**Propriétés**

- argsh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $\operatorname{argsh}(-x) = -\operatorname{argsh}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

5.2 Arccosinus hyperbolique**Définition**

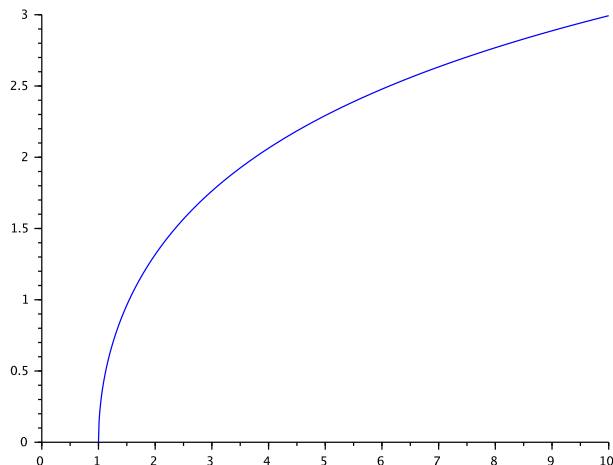
On appelle $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction réciproque de la fonction $\operatorname{ch} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $]1, +\infty[$

Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Primitives : $x \mapsto x.\operatorname{argch}(x) - \sqrt{x^2-1} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphe**Propriétés**

- argch est bijective de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$
- $\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ pour tout $x \in [1, +\infty[$

5.3 Arctangente hyperbolique**Définition**

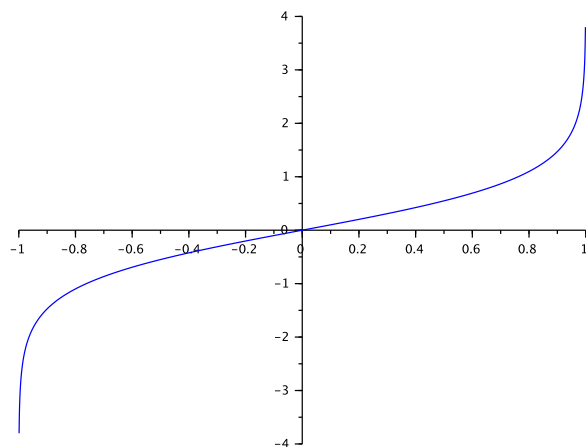
On appelle $\operatorname{argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$.

Dérivé et primitives

Domaine de dérivabilité : $] -1, 1[$

Dérivé : $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

Primitives : $x \mapsto x \cdot \operatorname{argth}(x) + \ln(\sqrt{1-x^2}) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Graphe

Propriétés

- argth est bijective de $] - 1, 1[$ dans $\mathbb{R}$
- $\operatorname{argth}(-x) = -\operatorname{argth}(x)$ pour tout $x \in] - 1, 1[$
- $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ pour tout $x \in] - 1, 1[$

6 Quelques formules

- $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1}}{a-1}$ pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
 - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 - $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
 - $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
 - $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
 - $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$