Université Aix-Marseille	2014–2015

Parcours CUPGE - Introduction à l'analyse

Devoir surveillé n° 1

Lundi 3 novembre 2014

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1. (4 points)

On considère l'application cotan : $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition maximale dans $\mathbb{R}$ de cotan.
2. Déterminer, en le justifiant, un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que cotan : $I \to \mathbb{R}$ soit bijective.

   On note arcot : $\mathbb{R} \to I$ l'application réciproque de cotan.
3. Justifier la dérivabilité de arcot son ensemble de définition.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{arcot}(x) + \arctan(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ une constante que l'on déterminera.

Exercice 2. (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1. $(x^2)^x = x^{x^2}$;
2. $\cos(e^x) = \sin(e^{-x})$.

Exercice 3. (5 points)

Après avoir déterminé leurs domaines de dérivabilité, calculer les dérivés des fonctions suivantes :

$* \; f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x^2) \end{array}$;

$* \; g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+\sin(2x)\cos(x)-\sin(x)\cos(2x)} \end{array}$;

$* \; h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \end{array}$.

Exercice 4. (8 points)

Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives ; et, le cas échéant, expliciter l'application réciproque :

$* \; a\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x}{2+x^2} \end{array}$;

$* \; b\colon \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\sqrt{1+e^{\tan(x)}}-1\right) \end{array}$;

$* \; c\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{|x|-x} \end{array}$;

$* \; d\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 3^n - 2^n \end{array}$.