Université Aix-Marseille	2014–2015

Parcours CUPGE - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 2

Mardi 2 décembre 2014

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée. Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits. Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1. (8 points)
Donner les domaines de dérivabilité des fonctions suivantes, puis les dériver :

$$f_1(x) = \arccos(x) + \frac{1}{x^2} \ ; \qquad f_2(x) = \mathrm{ch}(x)\cos^2(x) \ ; \qquad f_3(x) = \ln\left|\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| \ ;$$

$$f_4(x) = \frac{\sqrt{1+\sin(x)}}{1+x} \ ; \qquad f_5(x) = \arctan\left(e^{\sqrt{\ln(x)}}\right) \ ; \qquad f_6(x) = \mathrm{argch}\big(\sqrt{x} + x\ln(x)\big).$$

Exercice 2. (8 points)
Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \qquad g_2(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \ ; \qquad g_3(x) = x^2 e^{-x} \ ;$$

$$g_4(x) = \frac{1+x^2}{2x^3 - x^2 + 2x} \ ; \qquad g_5(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 3. (4 points)
A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\frac{t}{1-t}}$, calculer une primitive sur $]0,1[$ de la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}.$$

Exercice 4. (bonus)
On considère les fonctions f et g définie par $f(x) = 2\mathrm{argth}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ et $g(x) = \mathrm{sg}(x)\mathrm{argch}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ avec

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sin(x) > 0 \\ 0 & \text{si } \sin(x) = 0 \\ -1 & \text{si } \sin(x) < 0 \end{cases}$$

Montrer que $f = g$.