Université Aix-Marseille 2014–2015

Parcours CUPGE - **Introduction à l'analyse**

Devoir surveillé n° 3

Jeudi 8 janvier 2015

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Exercice 1. (4 points)

1. Donner la définition
   (a) d'une application injective ;
   (b) de la fonction cosinus hyperbolique ;
   (c) d'une suite croissante.
2. Tracer le graphe
   (a) de la fonction logarithme ;
   (b) de la fonction argth.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, montrer que $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$.

Exercice 2. (3 points)

1. La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ définie par $f(n) = \frac{1+e^{i\sqrt{n}}}{1+n^2}$ est-elle surjective ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(e^x) = \sin(e^x)$.

Exercice 3. (8 points)

1. (a) Dériver la fonction $\left(x \mapsto 2\sqrt{1+\sin^2(x)}\right)$.
   (b) Prouver que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{argth}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.
2. A l'aide du changement de variable $u = \sin^2(t)$, calculer une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction

$$\left(x \mapsto \frac{2\tan(x)}{1+\sin^2(x)}\right).$$

   En déduire une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $(1+\sin^2(x))y'(x) + 2\tan(x)y(x) = \cos(x)\sin(2x)$.

Exercice 4. (5 points)
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle avec conditions initiales suivante :

$$\begin{cases} y(1) = y'(1) = 0\ ; \\ x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = \ln(x). \end{cases} \tag{1}$$

1. Soit y_0 une solution de (1). On fait le changement de variable $x = e^t$ et on définit en conséquence la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $z(t) = y_0(e^t)$.
   (a) Justifier que z est deux fois dérivable.
   (b) Exprimer y_0, y_0' et y_0'' en fonction de z et de ses dérivés.

(c) En déduire une équation différentielle linéaire d'ordre 2, en la variable t et avec conditions initiales en $t = 0$, vérifiée par z.

(d) Donner une expression explicite pour z.

2. Résoudre (1) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5. (2 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - \tan(x)y(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$;
2. $\left\{\begin{array}{l} 2y''(x) - 2\sqrt{2}y'(x) + y(x) + 9\cos(2x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right.$.

Exercice 6. (1 point)
A l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$.