CUPGE

Introduction à l'analyse

PLANCHE 1 - FONCTIONS USUELLES

Logique et applications.

Exercice 1.

- En posant les notations nécessaires, traduire en langage mathématique l'affirmation suivante :
 "Toutes les voitures du parking de l'université sont rouges"
 puis écrire sa négation.
- Ecrire la négation de " $\forall a \in A, \exists b \in B, a + b \in B$ ".
- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$. Donner, en la justifiant, la valeur de x .

Exercice 2. Donner les domaines de définition maximale dans $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 f : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) & g : x \mapsto \ln(\exp(x)) \\
 h : x \mapsto \sqrt{\cos(x)} & k : x \mapsto (\ln(x))^{\sin(x)}
 \end{array}$$

Exercice 3.

- On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 n \mapsto \frac{2^n}{n+1} & n \mapsto 3n & n \mapsto n^2 + 1 & x \mapsto x^2
 \end{array}$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)(n)$, $(f \circ h)(n)$, $(k \circ f)(n)$, $(k \circ f \circ g)(n)$ et $(k \circ f \circ h \circ g)(n)$.

- On considère les applications

$$\begin{array}{ll}
 f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* & g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto \frac{1}{x} & x \mapsto \frac{x-1}{x+1}
 \end{array}$$

Montrer que $g \circ f = -g$.

Fonctions trigonométriques.

Exercice 4.

- Rappeler la définition géométrique du cosinus et du sinus.
- (a) Justifier géométriquement que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 (b) En déduire que $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 (c) Déterminer l'ensemble des x tels que $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$.
- (a) Justifier géométriquement que $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
 (b) En déduire $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$ et $\sin(x - y)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(y)$.

- (c) En déduire $\tan(x+y)$ et $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$ en précisant les valeurs de x et y qui conviennent.
4. (a) Pour tout x qui convient, donner trois formules pour $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ et une formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
5. Pour tous p et q , montrer les formules

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

6. Montrer que, avec $t = \tan \frac{x}{2}$ et pour des valeurs de x que l'on précisera, on a

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 5. Résoudre les équations

$$\begin{aligned}\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \\ \cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) &= -1 & \tan 3x &= \tan x \\ \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) &= 0 & \cos^4(x) + \sin^4(x) &= 1.\end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan, on note O l'origine, A l'intersection du cercle unité avec le demi-axe des abscisses positives et M le point du cercle unité tel que la demi-droite $[OA)$ forme un angle de mesure x avec le demi-axe des abscisses positives. On note encore B le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et C le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par A . En comparant l'aire du triangle OBM , l'aire de la portion de disque OAM et l'aire du triangle OAC , montrez que

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

En déduire la limite quand x tend vers 0 de $\frac{\sin x}{x}$.

Exercice 7. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Fonction ln et fonction exp.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}} \qquad 2^{2x+1} - 3^x = 3^{x+1} - 2^{2x}.$$

Exercice 9.

1. Montrer que pour tout $x, y > 0$, on a $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
2. En déduire que pour tout $\alpha, \beta > 1$, on a $\sqrt{\ln(\alpha)\ln(\beta)} \leq \ln(\sqrt{\alpha\beta})$.

Fonctions hyperboliques.

Exercice 10.

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, calculer $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)$, $\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ et $\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$.
2. En déduire des expressions de $\operatorname{ch}(x+y)$, $\operatorname{ch}(x-y)$, $\operatorname{sh}(x+y)$ et $\operatorname{sh}(x-y)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(y)$ et $\operatorname{sh}(y)$.
3. En déduire des expressions pour $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y)$, $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y)$ et $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(y)$.
4. Montrer que, avec $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$ et pour des valeurs de x que l'on précisera, on a

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Exercice 11. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \operatorname{th}(2^k x).$$

Fonction exponentielle complexe.

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $e^{ix} := \cos x + i \sin x$.

Exercice 12. Déduire de la formule $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ les formules de duplication pour $\cos$ et $\sin$ obtenues dans l'exercice 4.

Exercice 13. Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $r \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A \cos x + B \sin x = r \cos(x - \varphi).$$

Exercice 14. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx, \quad \sin x + \cdots + \sin nx.$$

Exercice 15. En utilisant les mêmes formules de définition que dans le cas réel, calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(ix)$ et $-\operatorname{ish}(ix)$. En déduire les formules de l'exercice 4 à l'aide des formules de l'exercice 10.