Parcours CUPGE
Introduction à l'analyse

PLANCHE 2 - FONCTIONS RÉCIPROQUES

Injectivité, surjectivité, bijectivité.

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1$$

$$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + 1$$

$$h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

$$k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

$$m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) + xe^{x^2}$$

$$n : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^* \\ (n, p) \mapsto 2^n(2p + 1)$$

Exercice 2.

1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

2. Montrer que la fonction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto f(x)$ est bijective.

Exercice 3. Soit A, B et C trois ensembles, $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications et on note $h = g \circ f : A \rightarrow C$ l'application composée.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors h est surjective.
3. Montrer que si h est injective, alors f est injective.
4. Montrer que si h est surjective, alors g est surjective.

Fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice 4. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. Calculer

$$\begin{array}{ll} 1) \arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right) & 2) \arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right) \\ 3) \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) & 4) \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) \end{array}$$

Exercice 6. Calculer pour tout x tel que ce soit défini

$$\begin{array}{ll} 1) \cos(\arccos(x)) & 2) \sin(\arcsin(x)) \\ 3) \cos(\arcsin(x)) & 4) \sin(\arccos(x)) \\ 5) \cos(\arctan(x)) & 6) \sin(\arctan(x)) \\ 7) \tan(\arccos(x)) & 8) \tan(\arcsin(x)) \end{array}.$$

Exercice 7.

1. Exprimer différemment $\arctan a + \arctan b$ pour $a, b > 0$ tq que $ab < 1$.
2. Calculer $2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{13}\right)$.
3. Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

Fonctions hyperboliques réciproques.

Exercice 8. Montrer que,

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;
2. pour tout $x \geq 1$, $\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$;
3. pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 9.

1. Montrer que, pour tout $x \in [1, \infty[$, on a $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{ch}(\operatorname{argth}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\operatorname{sh}(\operatorname{argth}(x)) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) + \operatorname{argth}(x) = \operatorname{argch}(\sqrt{2-x^2})$.

Exercice 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\alpha_x := \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

1. Montrer que $0 \leq \alpha_x < \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que $1 + \tan^2(\alpha_x) = \operatorname{ch}^2(x)$.
3. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a $\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$.