Université Aix-Marseille	2014–2015

Introduction à l'analyse

PARCOURS CUPGE

PLANCHE 3BIS DÉRIVATION

Donner les domaines de définition et de dérivabilité de ces fonctions, puis les dériver :

1. $f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$;
2. $f_2(x) = \frac{x^2+5}{x+1}$;
3. $f_3(x) = \frac{x+3}{x^2+2}$;
4. $f_4(x) = \sqrt{x}(1-x)$;
5. $f_5(x) = \sqrt{x}(1-\frac{1}{x^2})$;
6. $f_6(x) = (2x^3 - x^2 + 5)^5$;
7. $f_7(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;
8. $f_8(x) = 5\cos(4x) + 6\sin\left(\frac{x}{2}\right)$;
9. $f_9(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\sin(3x)$;
10. $f_{10}(x) = \tan(3x)$;
11. $f_{11}(x) = \frac{3\cos(2x)}{1+\tan(x)}$;
12. $f_{12}(x) = \big(\cos(x) + 2\tan(3x)\big)^2$;
13. $f_{13}(x) = \ln(3x+1)$;
14. $f_{14}(x) = x\ln(x)$;
15. $f_{15}(x) = \ln\big(\sin(x)\big)$;
16. $f_{16}(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{5x+5}\right)$;
17. $f_{17}(x) = e^{x^2+1}$;
18. $f_{18}(x) = (2x+3)e^{5x^2-1}$;
19. $f_{19}(x) = \ln(x)e^{2x}\sin(3x)$;
20. $f_{20}(x) = \mathrm{ch}(x)\ln(x)$;
21. $f_{21}(x) = \mathrm{sh}\big(1 - \mathrm{ch}^2(x)\big)$;
22. $f_{22}(x) = \arctan(\sqrt{x})$;
23. $f_{23}(x) = \arcsin(x) - \mathrm{argsh}(x)$;
24. $f_{24}(x) = \mathrm{argch}\big(e^x\cos(x)\big)\ln(\sqrt{1-x^2})$;
25. $f_{25}(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{1+x^3}}{\mathrm{argsh}(x-1)}\right)$;
26. $f_{26}(x) = e^{\arcsin(2-x)e^x}$;
27. $f_{27}(x) = \left(e^{\mathrm{ch}(x)} + \frac{e^{\mathrm{th}(x)}}{\cos(x)}\right)^7$;
28. $f_{28}(x) = \big(1 + \mathrm{th}^2(x)\big)^x$;
29. $f_{29}(x) = \left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\ln\big(1+\tan(\sqrt{x})\big) + e^{\mathrm{argsh}(\sqrt{1-x^x})}\right)\right)^{\sin(x)}$.

Solutions :

Toutes les fonctions sont dérivables par composition de fonctions dérivables. On donne d'abord le domaine de définition, puis le domaine dérivabilité, puis la dérivée. Un tiret signifie que les domaines de définition et de dérivabilité sont les mêmes.

1. $\mathbb{R}$; - ; $f_1'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$;
2. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; - ; $f_2'(x) = \frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$;
3. $\mathbb{R}$; - ; $f_3'(x) = \frac{2-6x-x^2}{(x^2+2)^2}$;
4. $\mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}_+^*$; $f_4'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$;
5. $\mathbb{R}_+^*$; - ; $f_5'(x) = \frac{x^2+3}{2x^{\frac{5}{2}}}$;
6. $\mathbb{R}$; - ; $f_6'(x) = 5(6x^2 - 2x)(2x^3 - x^2 + 5)^4$;
7. $\mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}_+^*$; $f_7'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$;
8. $\mathbb{R}$; - ; $f_8'(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 20\sin(4x)$;
9. $\mathbb{R}$; - ; $f_9'(x) = 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos(3x)\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
10. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6}(1+2k) | k \in \mathbb{Z}\right\}$; - ; $f_{10}'(x) = 3 + 3\tan^2(3x)$;
11. $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \right)$; - ; $f_{11}'(x) = \frac{-3\big(\sin(2x)+1\big)\big(\sin(2x)+\cos(2x)\big)}{\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2}$;
12. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6}(1+2k) | k \in \mathbb{Z}\right\}$; - ; $f_{12}'(x) = 2\big(6 + 6\tan^2(3x) - \sin(x)\big)\big(\cos(x) + 2\tan(3x)\big)$;
13. $\left]-\frac{1}{3}, \infty\right[$; - ; $f_{13}'(x) = \frac{3}{3x+1}$;
14. $\mathbb{R}_+^*$; - ; $f_{14}'(x) = 1 + \ln(x)$;
15. $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi, (2k+1)\pi\right[$; - ; $f_{15}'(x) = \frac{1}{\tan(x)}$;
16. $\mathbb{R} \setminus \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$; - ; $f_{16}'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$;
17. $\mathbb{R}$; - ; $f_{17}'(x) = 2xe^{x^2+1}$;
18. $\mathbb{R}$; - ; $f_{18}'(x) = 2(10x^2 + 15x + 1)e^{5x^2-1}$;
19. $\mathbb{R}_+^*$; - ; $f_{19}'(x) = \frac{e^{2x}\sin(3x)}{x} + 2\ln(x)e^{2x}\sin(3x) + 3\ln(x)e^{2x}\cos(3x)$;
20. $\mathbb{R}_+^*$; - ; $f_{20}'(x) = \ln(x)\mathrm{sh}(x) + \frac{\mathrm{ch}(x)}{x}$;
21. $\mathbb{R}$; - ; $f_{21}'(x) = -\mathrm{sh}(2x)\mathrm{ch}\big(\mathrm{ch}^2(x) - 1\big)$;
22. $\mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}_+^*$; $f_{22}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$;
23. $[-1, 1]$; $]-1, 1[$; $f_{23}'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$;
24. $[0, 1[$; $]0, 1[$; $f_{24}'(x) = \frac{e^x\big(\cos(x)-\sin(x)\big)\ln(1-x^2)}{2\sqrt{e^{2x}\cos^2(x)-1}} - \frac{x.\mathrm{argch}\big(e^x\cos(x)\big)}{1-x^2}$;
25. $[-1, \infty[\setminus\{1\}$; $]-1, \infty[\setminus\{1\}$; $f_{25}'(x) = \frac{2+2x^3-3x^2\sqrt{x^2-2x+2}.\mathrm{argsh}(x-1)}{2\sqrt{(x^2-2x+2)(1+x^3)}.\mathrm{argsh}^2(x-1)} \sin\left(\frac{\sqrt{1+x^3}}{\mathrm{argsh}(x-1)}\right)$;
26. $\left[2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}\right]$; $\left]2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}\right[$; $f_{26}'(x) = \left(\arcsin(2-x) - \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\right) e^{1+e^x\arcsin(2-x)}$;
27. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$; - ; $f_{27}'(x) = 7\left(e^{\mathrm{ch}(x)} + \frac{e^{\mathrm{th}(x)}}{\cos(x)}\right)^6 \left(\mathrm{sh}(x)e^{\mathrm{ch}(x)} + \frac{e^{\mathrm{th}(x)}}{\cos(x)}\big(1 - \mathrm{th}^2(x) + \tan(x)\big)\right)$;
28. $\mathbb{R}$; - ; $f_{28}'(x) = \left(1 + \mathrm{th}^2(x)\right)^x \left(\ln\left(1 + \mathrm{th}^2(x)\right) + \frac{2x.\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}(2x)}\right)$;
29. $[0, 1]$; $[0, 1[$; $f_{29}'(x) = \left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\ln\left(1+\tan(\sqrt{x})\right)+e^{\mathrm{argsh}(\sqrt{1-x^x})}\right)\right)^{\sin(x)} \left(\cos(x)\ln\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\ln(1+\tan\sqrt{x})+e^{\mathrm{argsh}\sqrt{1-e^{x\ln(x)}}}\right)\right) + \frac{\frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})(1+\tan\sqrt{x})} - \frac{\sin(x)e^{\mathrm{argsh}(\sqrt{1-x^x})}\big(1+\ln(x)\big)x^x}{2\sqrt{(2-x^x)(1-x^x)}}}{\arcsin\left(\ln(1+\tan\sqrt{x})+e^{\mathrm{argsh}\sqrt{1-e^{x\ln(x)}}}\right)\sqrt{1-\left(\ln(1+\tan\sqrt{x})+e^{\mathrm{argsh}\sqrt{1-e^{x\ln(x)}}}\right)^2}}\right)$.